N° d'Ordre 1 (1971)

THESES

présentées devant l'UNIVERSITE de NANTES

pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Jean ROYER

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE

1ère Thèse : Contribution à l'étude des majorations de contraintes dans les plaques percées

2ème Thèse : Propositions données par le Jury

Soutenues le 27 février 1971 devant la Commission d'Examen

M. D. TARDY — Président

M. R. VAN GEEN
M. A. ROBERT
Melle S. OFFRET
M. C. TRUCHASSON
} Examinateurs

N° d'Ordre 1 (1971)

THESES

présentées devant l'UNIVERSITE de NANTES

pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Jean ROYER

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE

1ère Thèse : Contribution à l'étude des majorations de contraintes dans les plaques percées

2ème Thèse : Propositions données par le Jury

Soutenues le 27 février 1971 devant la Commission d'Examen

M. D. TARDY	Président
M. R. VAN GEEN M. A. ROBERT Melle S. OFFRET M. C. TRUCHASSON	Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE NANTES

Président	M. KERNEIS	Médecine
Vice-Président	M. PETRESCO	Mathématiques

●●●●●●●●●●

LISTE DES ENSEIGNANTS DES DISCIPLINES SCIENTIFIQUES

Professeurs	M. BRILLOUET	Mathématiques
	M. MOLINARO	«
	M. PAUC	«
	M. PETRESCO	«
	M. RAFFIN	«
	M. VIVIER (E.N.S.M.)	«
	M. TARDY (E.N.S.M.)	Mécanique
	M. RAVILLY (E.N.S.M.)	«
	M. AVIGNON	Physique
	M. BOULLOUD	«
	M. COLLET	«
	M. MINN	«
	M. MEZENCEV (E.N.S.M.)	«
	M. MOUTON	«
	M. DUNOYER	Chimie
	M. GRAFF	«
	M. PIERI	«
	M. QUINIOU	«
	M. WOJTKOWIAK	«
	Melle DEBRAUX	Biologie
	M. GARRIGUES	«
	Mme LE DOUARIN	«
	M. LE DOUARIN	«
	M. SELLIER	«
	M. CAVET	Sciences de la Terre

Professeurs sans chaire	M. MEYER	Mathématiques
	M. BARDON	Physique
	M. GOUREAUX	«
	M. LASKAR	«
	Melle OFFRET (E.N.S.M.)	«
	M. GOBIN (E.N.S.M.)	Chimie
	M. MARTIN	«
	M. ROUXEL	«
	M. TOURNOUX	«
	M. DUPONT	Biologie
	M. SAUDRAY	«
	M. OTTMANN	Sciences de la Terre
Maîtres de Conférences	M. FOUQUES	Mathématiques
	M. IBISCH	«
	M. LAMEAU (E.N.S.M.)	«
	M. LEBORGNE	«
	M. GUEVEL (E.N.S M.)	Mécanique
	M. SULMONT(E.N.S.M.)	«
	M. VILAINE (E.N.S.M.)	«
	M. CAILLER (I.U.T)	Physique
	M. COTTU (I.U.T.)	«
	M. LE BIHAN	«
	M. LE CORRE (I.U.T.)	«
	M. LONCKE	«
	M. ROSIER	«
	M. BOUCHY (I.U.T.)	Chimie
	M. CHABANNEL	«
	Mme MARTIN	«
	M. POINTEAU (E.N.S.M.)	«
	M. AMOURIQ	Biologie
	M. LEBRUN	«
	Mme NICOLAS-PRATT	«
	M. FORESTIER	Sciences de la Terre
	M. NICOLAS	«

Secrétaire Général : M. LERAY

♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦

Le présent travail a été effectué au Laboratoire de Résistance des Matériaux, dirigé par Monsieur D. TARDY, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique, à qui je tiens à exprimer toute ma reconnaissance pour m'avoir inspiré ce travail et permis de le mener à bien.

Je remercie Monsieur VAN GEEN, Monsieur A. ROBERT, Mademoiselle S. OFFRET, Monsieur C. TRUCHASSON qui m'ont fait l'honneur de participer au Jury. Je tiens à adresser plus particulièrement mes remerciements à Monsieur VAN GEEN qui m'a non seulement conseillé mais accueilli dans son laboratoire à Bruxelles afin de compléter mon étude.

Enfin, j'exprime toute ma gratitude à ceux qui, à divers titres, m'ont aidé, en particulier, mes collègues et le personnel technique du Laboratoire ainsi que les personnes qui ont participé à la présentation de ce mémoire.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555419_0028

S O M M A I R E

Pages

INTRODUCTION -

1 - GENERALITES

2 - OBJET DE L'ETUDE

3 - DEFINITION DES SYMBOLES UTILISES

1 - BIBLIOGRAPHIE - 1

2 - ETUDE CRITIQUE DES METHODES DE CALCUL RELEVEES DANS LA BIBLIOGRAPHIE - 2

2,1 - Répartition des contraintes dans une plaque infinie en traction percée d'un trou circulaire 2

2,2 - Répartition des contraintes dans une plaque finie chargée symétriquement et percée d'un trou circulaire 8

2,21 - Méthode de solution 9

2,22 - Application au cas de la traction 14

2,221 - Contraintes à la frontière du trou 17

2,222 - Contraintes dans la section minimum 20

2,3 - Répartition des contraintes dans une plaque infinie en traction uniforme percée d'un trou elliptique. Solution en coordonnées curvilignes 20

2,4 - Répartition des contraintes dans une plaque infinie isotrope percée d'un trou 24

2,41 - Tension dans une direction donnée 28

2,42 - Cas du trou elliptique dans une plaque en traction 30

2,5 - Concentrations de contraintes dans une plaque infinie, trouée et renforcée 33

2,51 - Méthode de calcul 33

2,52 - Application au trou elliptique dans une plaque en traction 43

3 - APPLICATION DE LA METHODE DE CALCUL DES CONCENTRATIONS DE CONTRAINTES DANS UNE PLAQUE INFINIE TROUEE ET RENFORCEE - 49

4 - METHODE PROPOSEE POUR LE CALCUL DES CONCENTRATIONS DE CONTRAINTES DANS LES PLAQUES DE LARGEUR FINIE PERCEES EN LEUR CENTRE D'UN TROU CIRCULAIRE RENFORCE - 53

5 - ETUDE EXPERIMENTALE PERSONNELLE 69

5,1 - Méthode 69

5,11 - Principe de la méthode 69

5,12 - Description de l'appareil de mesure 72

5,13 - Montage expérimental 75

5,2 - Résultats 78

5,21 - Plaque infinie en traction percée d'un trou circulaire 78

5,211 - Mesures 78

5,212 - Séparation des contraintes principales-Isostatiques 84

5,213 - Précision des résultats 84

5,22 - Plaques de largeur finie en traction percée d'un trou circulaire 86

5,221 - Variation du coefficient de majoration de contraintes au bord du trou en fonction du rapport du diamètre du trou à la largeur de la plaque 86

5,222 - Répartition des contraintes dans la section minimum 93

5,223 - Précision et discussion des résultats 95

5,23 - Plaques de largeur finie en traction percées d'un trou circulaire renforcé 97

5,231 - Mesures 102

5,232 - Précision des résultats et discussion 104

5,24 - Plaques en traction percées d'un trou elliptique 105

5,241 - Variation du coefficient de majoration de contraintes au bord du trou en fonction de la direction de la traction 105

5,242 - Variation du coefficient de majoration de contrainte au bord du trou en fonction du rapport du grand axe de l'ellipse à la largeur de la plaque 106

5,243 - Précision des résultats 106

5,3 - Méthode des éléments finis 111

5,31 - Principe et résultats de la méthode 111

5,32 - Discussion des résultats 119

6 - CONCLUSION - 123

INTRODUCTION

---

1 - *GENERALITES* -

Le problème du calcul des plaques infinies percées d'un orifice est résolu pourvu qu'il soit possible de transformer cet orifice en cercle à l'aide d'une transformation conforme ; mais on ne connaît pas de méthode générale applicable aux plaques de largeur finie et aux bossages. Cependant, la connaissance des coefficients de majoration de contraintes au bord des trous, renforcés ou non, dans des plaques de dimensions finies est d'un intérêt primordial dans la construction mécanique.

2 - *OBJET DE L'ETUDE* -

Après un rappel des méthodes les plus générales pour le calcul des plaques percées et l'application au cas de la traction uniforme, nous proposons une étude approchée pour la détermination des coefficients de majoration de contraintes au bord d'un trou circulaire renforcé dans une plaque de largeur finie en traction uniforme. Ensuite, nous analyserons les possibilités offertes en photoélasticité bidimensionnelle par le banc type Robert et nous rapporterons les résultats obtenus dans les différents cas étudiés : trous circulaires, renforcés ou non, trous elliptiques, dans des plaques finies et infinies en traction uniforme ainsi qu'une discussion de la précision dans les différents cas.

3 - *DEFINITION DES SYMBOLES UTILISES* -

a	Rayon du trou circulaire ou demi-axe de l'ellipse
b	Demi-largeur de la plaque
c	rayon extérieur du bossage
λ , δ	Rapports de a sur b
e_o	Epaisseur du bossage
e_1	Epaisseur nominale de la plaque
t	Rapport de e_o sur e_1
p , σ_o	Tractions à l'infini
σ_x, σ_y, τ_{xy}	Contraintes en coordonnées cartésiennes (x, y)
σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$	Contraintes en coordonnées polaires (r, θ)

σ_ξ, σ_η, $\tau_{\xi\eta}$	Contraintes en coordonnées curvilignes (ξ, η)
U, ψ, Φ, χ, ϕ	Fonctions de contraintes
θ	Angle polaire
A, B, C, D, E A', B', C', D'	Constantes
ξ	$= \frac{x}{b}$ (trou circulaire) ou coordonnée curviligne
η	$= \frac{y}{b}$ (trou circulaire) ou coordonnée curviligne
ρ	$= \frac{r}{b}$ (trou circulaire)
P, Q, R	Fonctions harmoniques
z, ζ	Variables dans le plan complexe
σ_x^* σ_y^* τ_{xy}^*	Contraintes additionnelles dues à la présence d'un trou
$\phi^*_{(z)}$, $\psi^*_{(z)}$	Fonctions de contraintes entraînées par la présence d'un trou
f_1, f_2	Conditions aux limites pour les contraintes dans le plan complexe
$\Omega(\zeta)$, $\omega(\zeta)$	Transformations conformes
$\sigma = e^{i\theta}$	Valeur particulière de ζ pour r = a
$\grave{}U_{(z)}$	Intégrale de $U_{(z)}$ par rapport à z
u , v	Déplacements en coordonnées cartésiennes
G	Module de glissement
ν	Coefficient de Poisson
σ_s , σ_n	Contraintes normales dans deux directions perpendiculaires (n, s)
ξ	Pente de la frontière d'un trou
T	Traction uniforme dans le renforcement d'un trou
A	Aire de la section de renforcement
R	Rayon de courbure de la frontière du trou

1 - BIBLIOGRAPHIE

|1| - KIRSCH G. Cité par Timoshenko et Goodier
V.D.I. Vol. 42, 1898.

|2| - HOWLAND R.C.J.
On the stresses in the neighbourhood of a circular hole in a strip under tension.
Phil. Transaction A, Vol. 229, 1930.

|3| - HOWLAND R.C.J.
Biharmonic analysis in a perforated strip.
Phil. Trans. A, Vol. 232, 1933.

|4| - HOWLAND R.C.J.
Roy. Soc. Proc. A Vol. 124, 1929.

|5| - PICARD Cité par Howland
Traité d'analyse Vol. 2, chapitre 3

|6| - FILON Cité par Howland
Trans. Roy. Soc. A Vol. 201, 1903.

|7| - KOLOSOFF Cité par Timoshenko et Goodier
Doctoral Dissertation, Dorpat 1909,
et Z. Math. Physik. Vol. 62, 1914.

|8| - TIMOSHENKO, GOODIER
Theory of Elasticity
Mc. Graw Hill 3ème édition 1970.

|9| - STEVENSON Cité par Timoshenko et Goodier
Proc. Roy. Soc. (Londre) A Vol. 184, 1945.

|10| - COKER, FILON
Photo-Elasticity
Cambridge University Press - New York 1931.

|11| - MUSKHELISHVILI N.I.
Some basic problems of the mathematical theory of elasticity
P. Noordhoff Ltd Groningen 1963.

|12| - SAVIN G.N.
Stress concentration around holes
Pergamon Press. New York 1961. Traduction de l'original russe de 1951.

|13| - WITTRICK W.H.
Stresses around reinforced elliptical holes with application to pressure cabin windows.
The Aeronautical Quarterly,novembre 1959.

|14| - WITTRICK W.H.
Analysis of stress concentrations around reinforced hole in infinite sheets.
The Aeronautical Quarterly, août 1960

|15| - WITTRICK W.H.
The stresses around reinforced elliptical holes in plane sheet.
Structures and Materials Report 267.

|16| - WITTRICK W.H.
On the axisymetrical stress concentration at an eccentrically reinforced circular hole in a plate.
The Aeronautical Quarterly, février 1965.

|17| - MANSFIELD E.H.
Neutral holes in plane sheet - Reinforced holes which are elastically equivalent to the uncut sheet.
Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 6, 1953.

|18| - RADOK J.R.M.
Problems of plane elasticity for reinforced boundaries.
Journal of Applied Mechanics, june 1955.

|19| - Samuel LEVY, Mc. PHERSON, F.C. SMITH
Reinforces of a small circular hole in a plane sheet under tension.
Journal of Applied Mechanics, june 1948.

|20| - WELLS A.A.
On the plane stress distribution in a infinite plate with a rim stiffened elliptical opening.
Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics Vol. 3, 1950.

|21| - MILNE-THOMSON
Systèmes élastiques plans.
Dunod 1968.

|22| - ROBERT, J.L. VERNET
Application à la photoélasticimétrie de nouveaux procédés automatiques de détermination des axes et du déphasage dans un milieu biréfringent.
V.D.I. Berichte n° 102, 1966.

|23| - ROBERT
Méthodes nouvelles en photoélasticimétrie à deux dimensions et à trois dimensions.
Mémorial de l'Artillerie française T 40, 1er fascicule 1966.

|24| - ROBERT
Principe et description d'un photoélasticimètre bidimensionnel automatique.
Revue Française de Mécanique n° 29.

|25| - JOBIN, YVON
Instructions pour l'utilisation du photoélasticimètre bidimensionnel automatique.

|26| - MORICE E., CHARTIER F.
Méthode statistique
Imprimerie Nationale Tome II 1954.

|27| - COKER, CHAKKO, SATAKE
Photoélastic and strain measurements of the effects of circulars holes on the distribution of stress in tension members.
Institution of Engineers and Shipbuilders in Scotland 1920.

|28| - SHIN, ICHI, SUZUKI
Stress measurements in a plate containing a reinforced circular hole using a photoelastic method.
International Journal of Mechanical Sciences
Pergamon Press Ltd 1967, Vol. 6.

|29| - SEIKA, ISHII
Photoelastic investigation of the maximum stress in a plate with a reinforces circular hole under iniaxial tension.
Journal of Applied Mechanics, décembre 1964.

|30| - TURNER M.J., CLOUGH R.W., MARTIN H.C., TOPP L.J.
Stiffness and deflection analysis of complex structures
Journal of Aeronautical Sciences n° 23, 1956.

|31| - ZIENKIEWICZ O.C.
The finite element method in structural andcontinuum Mechanics.
Mc. Graw Hill 1967.

|32| - HICKS R.
Asymetrically plate-reinforced circular hole in a uniformly end-loaded flat plate.
The Aeronautical Quarterly, p. 183-198, mai 1959.

|33| - WITTRICK W.H.
Some simple transformation function for square and triangular holes with rounded corners.
The Aeronautical Quarterly, mai 1960.

|34| - LEVIN E.
Elastic equilibrium of a plate with a reinforced elliptical hole.
Journal of Applied Mechanics, p. 283-288, juin 1960.

|35| - HEYWOOD R.B.
Designing by photoelasticity
Chapman, Hall Ltd. 1952.

2 - ETUDE CRITIQUE DES METHODES DE CALCUL RELEVEES DANS LA BIBLIOGRAPHIE

2,1 - *REPARTITION DES CONTRAINTES DANS UNE PLAQUE INFINIE EN TRACTION PURE PERCEE D'UN TROU CIRCULAIRE* - *Solution de KIRSCH G.* |1|

Un trou dans une plaque chargée, modifie localement la répartition des contraintes. Mais, d'après le principe de St Venant, si le diamètre du trou est faible par rapport aux dimensions de la plaque, son influence est rapidement négligeable lorsque l'on s'en éloigne.

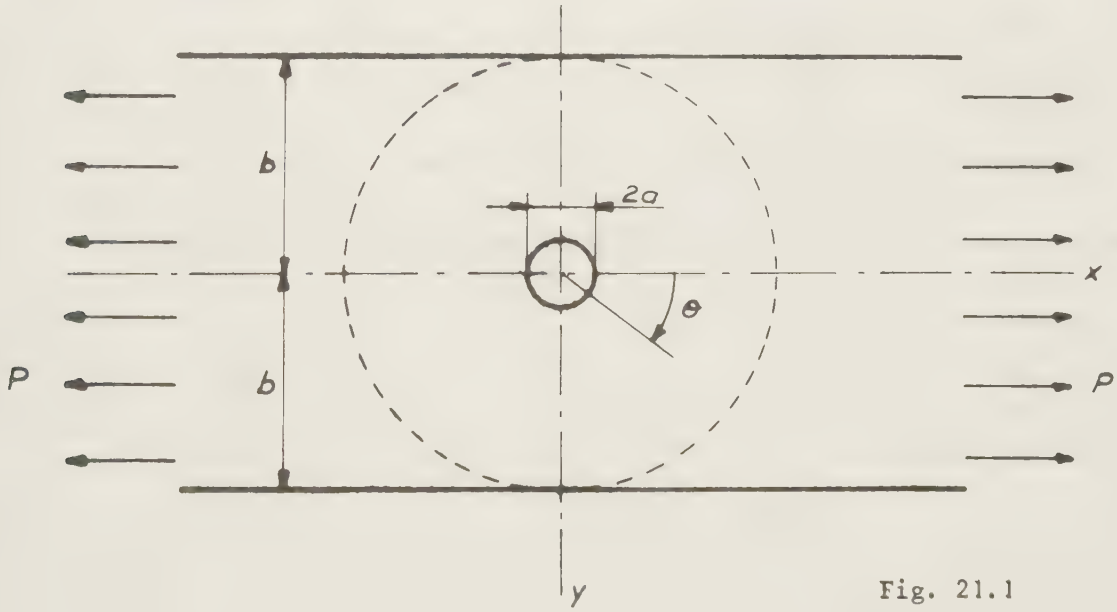


Fig. 21.1

Ainsi, sur une plaque en traction uniforme (p) Fig. 21.1, sur le cercle de diamètre 2b, l'état de contraintes n'est pas modifié par la présence du trou de diamètre 2a pourvu que a soit faible devant b.

En coordonnées polaires, nous obtenons alors :

$$(\sigma_r)_{r=b} = p/2\ (1 + \cos 2\theta)$$
$$(\tau_{r\theta})_{r=b} = -\ p/2 \sin 2\theta$$

Nous pouvons considérer le disque de diamètre 2b comme étant soumis à deux sollicitations distinctes sur son pourtour :

- une traction uniformément distribuée $p/2$
- une sollicitation donnant une contrainte normale $P/2 \cos 2\theta$ et une contrainte tangentielle $- p/2 \sin 2\theta$.

Nous obtiendrons la répartition des contraintes à l'intérieur du disque par superposition de ces deux chargements.

Les conditions aux limites $\sigma_r = p/2 \cos 2\theta$ et $\tau_{r\theta} = - p/2 \sin 2\theta$ sont satisfaites avec une fonction de contraintes de la forme : $\Phi = f(r) \cos 2\theta$ qui doit elle-même satisfaire l'équation de compatibilité en coordonnées polaires dans le cas d'un déplacement plan.

$$\left(\frac{\delta^2}{\delta r^2} + \frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta r} + \frac{1}{r^2}\frac{\delta^2}{\delta\theta^2}\right)\left(\frac{\delta^2\Phi}{\delta r^2} + \frac{1}{r}\frac{\delta\Phi}{\delta r} + \frac{1}{r^2}\frac{\delta^2\Phi}{\delta\theta^2}\right) = 0$$

Ceci conduit à :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right)\left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2}\right) = 0$$

dont la solution générale est :

$$f(r) = Ar^2 + Br^4 + C\frac{1}{r^2} + D$$

La fonction de contraintes est alors de la forme :

$\Phi = (Ar^2 + Br^4 + C\frac{1}{r^2} + D) \cos 2\theta$ à partir de laquelle il est possible de déduire les contraintes correspondantes :

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\delta\Phi}{\delta r} + \frac{1}{r^2}\frac{\delta^2\Phi}{\delta\theta^2} = -\left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2}\right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\delta^2\Phi}{\delta r^2} = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4}\right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\delta}{\delta r}\left(\frac{1}{r}\frac{\delta\Phi}{\delta\theta}\right) = \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2}\right) \sin 2\theta$$

Les constantes A, B, C et D se déduisent des conditions aux limites sur les diamètres intérieur et extérieur du disque.

$$2A + \frac{6C}{b^4} + \frac{4D}{b^2} = - p/2$$

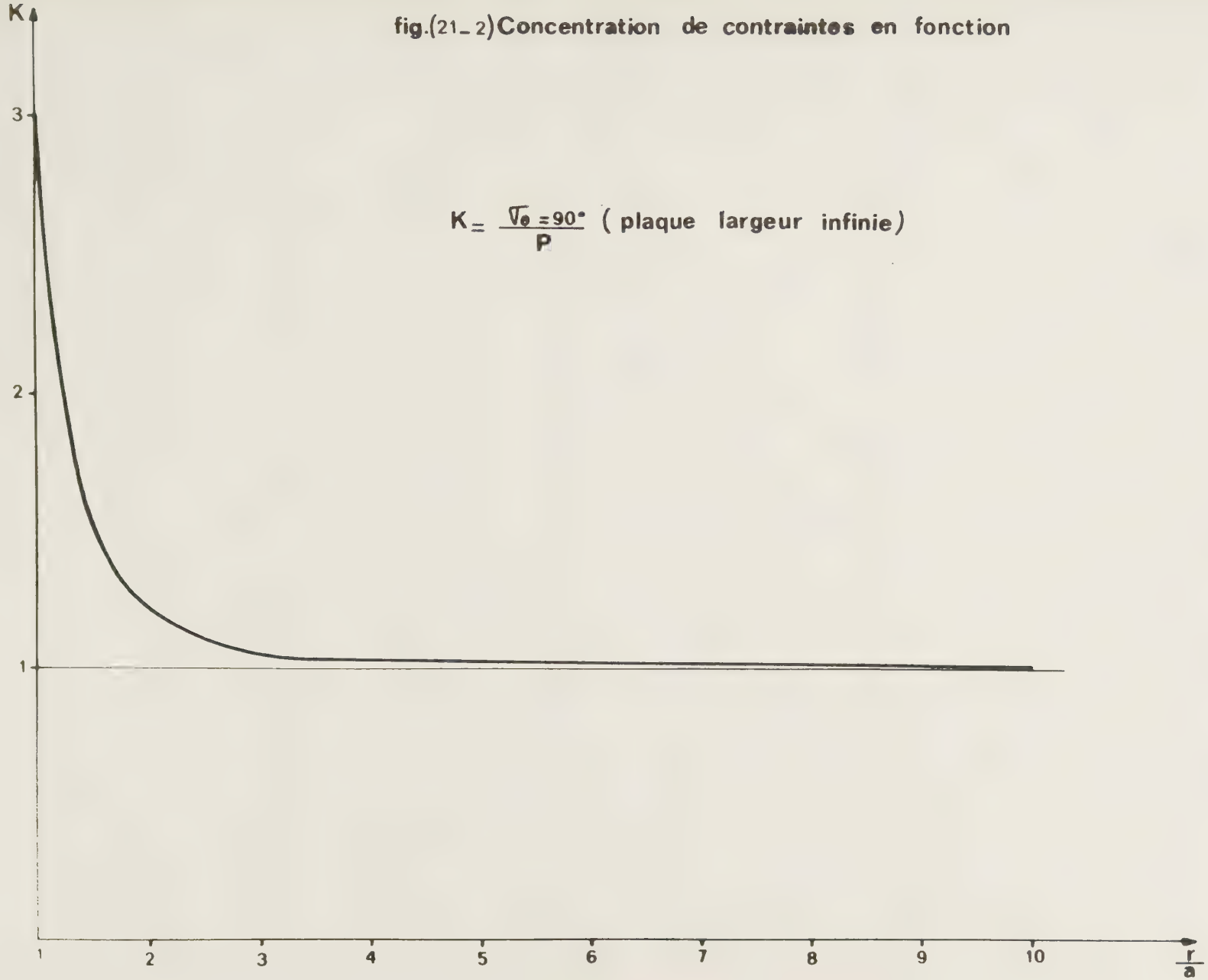
$$2A + \frac{6C}{a^4} + \frac{4D}{a^2} = 0$$

$$2A + 6Bb^2 - \frac{6C}{b^4} - \frac{2D}{b^2} = - p/2$$

$$2A + 6Ba^2 - \frac{6C}{a^4} - \frac{2D}{a^2} = 0$$

fig.(21_2)Concentration de contraintes en fonction

$$K = \frac{\sigma_{\theta = 90°}}{P} \text{ (plaque largeur infinie)}$$



La résolution de ces équations, en posant a/b = 0 (plaque de largeur infinie) conduit aux valeurs suivantes des coefficients.

$$A = -\frac{p}{4} \qquad B = 0 \qquad C = -\frac{a^4}{4}\,p \qquad D = \frac{a^2}{2}\,p$$

En superposant les contraintes dues à la traction uniforme p/2 :

$$\sigma_r = \frac{p}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{p}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

il en résulte les expression finales pour les contraintes :

$$\sigma_r = \frac{p}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{p}{2}\left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{p}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{p}{2}\left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{p}{2}\left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta$$

Sur la courbe $\sigma_{\theta = 90°}/p$ (Fig. 21.2) en fonction de $\frac{r}{a}$, nous voyons que la majoration de contraintes décroît très rapidement de 3 vers la valeur asymptotique 1. Cette remarque sera utilisée dans des calculs ultérieurs lorsque a/b n'est plus nul.

Cette résolution, bien connue, conduit très rapidement à des valeurs théoriques exactes tout en ne faisant appel qu'à des calculs simples. Malheureusement, son application est extrêmement limitée par les hypothèses formulées : trou circulaire, plaque infinie sollicitée en traction uniforme.

2,2 - *REPERTITION DES CONTRAINTES DANS UNE PLAQUE DE LARGEUR FINIE, PERCEE D'UN TROU CIRCULAIRE ET CHARGEE SYMETRIQUEMENT* -

Une solution a été fournie par Howland |2| |3| |4| dès 1929. Elle utilise des approximations successives, analogues au procédé alternatif de Schwarz |5|, et la convergence des séries qui est un problème ardu, en limite l'application. Le développement suivant est applicable à des plaques percées en leur milieu, chargées symétriquement par rapport à leur axe et par rapport au diamètre du trou perpendiculaire à leur axe. La convergence est assurée lorsque le diamètre du trou reste inférieur à la moitié de la largeur de la plaque.

2,21 - *Méthode de solution* -

Prenons l'origine au centre du trou dans une plaque d'épaisseur constante, isotrope et élastique (Fig. 22.1).

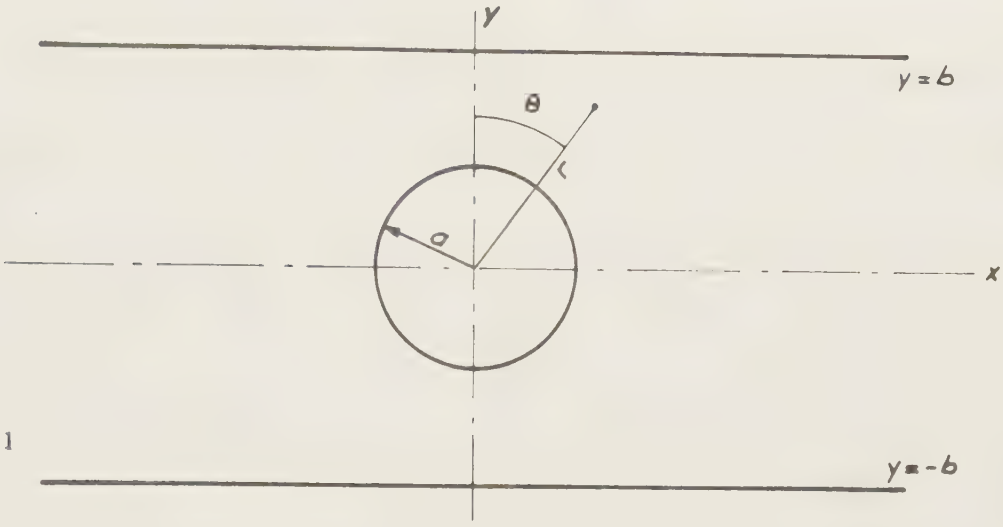


Fig. 22.1

$$x = r \sin \theta$$
$$y = r \cos \theta \qquad (22.1)$$

Posons : $\lambda = \frac{a}{b}$, $\xi = \frac{x}{b}$, $\eta = \frac{y}{b}$, $\rho = \frac{r}{b}$ (22.2)

pour utiliser des coordonnées sans dimension

λ restant inférieur à 0,5.

Le matériau est supposé en état plan de contraintes généralisé, défini par la fonction de contraintes χ qui doit satisfaire les conditions suivantes :

a) $\nabla^4\chi = 0$ à l'intérieur du matériau

b) les contraintes $\sigma_x = \frac{1}{b^2}\frac{\delta^2\chi}{\delta\eta^2}$, $\sigma_y = \frac{1}{b^2}\frac{\delta^2\chi}{\delta\xi}$, $\tau_{xy} = -\frac{1}{b^2}\frac{\delta^2\chi}{\delta\xi\delta\eta}$ (22.3)

satisfont les conditions limites à l'infini.

c) sur les bords $\eta = \pm 1$: $\frac{\delta^2\chi}{\delta\xi^2} = \frac{\delta^2\chi}{\delta\xi\delta\eta} = 0$

d) au bord du trou : $\rho = \lambda$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{b^2}\left|\frac{1}{\rho^2}\frac{\delta^2\chi}{\delta\theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\delta\chi}{\delta\rho}\right| = f(\theta) \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{b^2}\frac{\delta}{\delta\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\delta\chi}{\delta\theta}\right) = \Phi(\theta) \end{aligned}\right\} \qquad (22.4)$$

Dans le cas d'une traction pure dans la direction $\theta = 0$, les fonctions $f(\theta)$ et $\Phi(\theta)$ symétriques par rapport à $\theta = \frac{\pi}{2}$ sont nulles.

χ peut s'écrire sous forme d'une série de fonctions :

$$\chi = \chi'_o + \chi_o + \chi_1 + \chi_2 + \dots \tag{22.5}$$

qui satisfont $\nabla^4(\chi) = 0$ et ayant séparément les propriétés suivantes :

χ'_o donne les contraintes à l'infini mais pas sur les limites $\eta = \pm 1$ et $\rho = \lambda$

$\chi'_o + \chi_o$ satisfait les conditions aux limites à l'infini et au bord du trou mais pas sur les bords de la plaque. C'est la solution de la plaque infinie.

χ_o sera de la forme $\chi_o = - D_o^{(o)} \log \rho + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D_{2n}^{(o)}}{\rho^{2n}} + \frac{E_{2n}^{(o)}}{\rho^{2n-2}}\right) \cos 2n\theta$ (22.6)

Puis χ_1 annule les contraintes dues à χ_o mais en introduit de nouvelles sur le bord du trou, alors annulées par χ_2 qui introduit de nouvelles contraintes sur les bords de la plaque...

Plus généralement, $\chi_{2r} + \chi_{2r+1}$ ne donne pas de contrainte sur $\eta = \pm 1$ alors que $\chi_{2r-1} + \chi_{2r}$ n'en donne pas pour $\rho = \lambda$. Supposons l'itération menée r fois, nous avons χ_{2r} qui est de la forme :

$$\chi_{2r} = - D_o^{(r)} \log \rho + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D_{2n}^{(r)}}{\rho^{2n}} + \frac{E_{2n}^{(r)}}{\rho^{2n-2}}\right) \cos 2n\theta \tag{22.7}$$

L'étape suivante est la détermination des coefficients de la série χ_{2r+2}. Nous savons que la fonction χ_{2r} engendre les contraintes suivantes (en omettant les exposants r) :

$$\sigma_r = \frac{1}{b^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\delta \chi_{2r}}{\delta \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\delta^2 \chi_{2r}}{\delta \theta^2}\right)$$

$$= \frac{1}{b^2} \left| - \frac{D_o}{\rho^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{n(2n+1)D_{2n}}{\rho^{2n+2}} + \frac{(n+1)(2n-1)E_{2n}}{\rho^{2n}}\right\} \cos 2n\theta \right| \tag{22.8}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{b^2} \frac{\delta}{\delta \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\delta \chi_{2r}}{\delta \theta}\right)$$

$$= - \frac{2}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n(2n+1)D_{2n}}{\rho^{2n+2}} + \frac{n(2n-1)E_{2n}}{\rho^{2n}} \right\} \sin 2n\theta \tag{22.9}$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{b^2} \frac{\delta^2 \chi_{2r}}{\delta \rho^2}$$

$$= \frac{1}{b^2} \left| \frac{D_o}{\rho^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n(2n+1)D_{2n}}{\rho^{2n+2}} + \frac{(n-1)(2n-1)E_{2n}}{\rho^{2n}} \right\} \cos 2n\theta \right. \tag{22.10}$$

Passons des contraintes en coordonnées polaires aux contraintes en coordonnées cartésiennes :

$$\sigma_x = \frac{1}{2}\left|(\sigma_r+\sigma_\theta)-(\sigma_r-\sigma_\theta)\cos 2\theta + 2\tau_{r\theta}\sin 2\theta\right|$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2}\left|(\sigma_r+\sigma_\theta)+(\sigma_r-\sigma_\theta)\cos 2\theta - 2\tau_{r\theta}\sin 2\theta\right| \qquad (22.11)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2}\left|(\sigma_r-\sigma_\theta)\sin 2\theta + 2\tau_{r\theta}\cos 2\theta\right|$$

D'après les équations (22.8), (22.9) et (22.10) :

$$\frac{1}{2}(\sigma_r-\sigma_\theta) = -\frac{1}{b^2}\left|\frac{D_o}{\rho^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n(2n+1)D_{2n}}{\rho^{2n+2}} + \frac{n(2n-1)E_{2n}}{\rho^{2n}}\right\}\cos 2n\theta\right.$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_r-\sigma_\theta)\cos 2\theta - \tau_{r\theta}\sin 2\theta =$$

$$-\frac{1}{b^2}\left|\frac{D_o}{\rho^2}\cos 2\theta + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n(2n+1)D_{2n}}{\rho^{2n+2}} + \frac{n(2n-1)E_{2n}}{\rho^{2n}}\right\}\cos(2n+2)\theta\right|$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_r-\sigma_\theta)\sin 2\theta + \tau_{r\theta}\cos 2\theta =$$

$$-\frac{1}{b^2}\left|\frac{D_o}{\rho^2}\sin 2\theta + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n(2n+1)D_{2n}}{\rho^{2n+2}} + \frac{n(2n-1)E_{2n}}{\rho^{2n}}\right\}\sin(2n+2)\theta\right|$$

$$\text{et } \frac{1}{2}(\sigma_r+\sigma_\theta) = -\frac{2}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)E_{2n}}{\rho^{2n}}\cos 2n\theta$$

En reportant ces valeurs dans l'équation (22.11) nous obtenons :

$$\sigma_x = \frac{1}{b^2}\left|\frac{D_o-2E_2}{\rho^2}\cos 2\theta + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(2n+1)(nD_{2n}-E_{2n+2})}{\rho^{2n+2}} + \frac{n(2n-1)E_{2n}}{\rho^{2n}}\right\}\cos(2n+2)\theta\right| \qquad (22.12)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{b^2}\left|-\frac{D_o-2E_2}{\rho^2}\cos 2\theta - 2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(2n+1)(nD_{2n}+E_{2n+2})}{\rho^{2n+2}} + \frac{n(2n-1)E_{2n}}{\rho^{2n}}\right\}\cos(2n+2)\theta\right. \qquad (22.13)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{b^2}\left|\frac{D_o}{\rho^2}\sin 2\theta + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n(2n+1)D_{2n}}{\rho^{2n+2}} + \frac{n(2n-1)E_{2n}}{\rho^{2n}}\right\}\sin(2n+2)\theta\right| \qquad (22.14)$$

L'étape suivante est la détermination de χ_{2r+1} qui annule les contraintes (22.13) et (22.14) sur les bords de la plaque. La méthode, formulée par Filon |6| a été modifiée par Howland |4| .

Soit χ la fonction biharmonique, finie et continue sur la plaque qui donne les contraintes :

$$= \Phi(\xi) \qquad \tau_{xy} = \psi(\xi) \qquad \text{pour} \quad \eta = 1$$

$$\sigma = \Phi(\xi) \qquad \tau_{xy} = -\psi(\xi) \qquad \text{pour} \quad \eta = -1$$

$\Phi(\xi)$ et $\psi(\xi)$ étant des fonctions paires.

La fonction χ s'écrit alors sous la forme : $\chi = \chi' + \chi''$ (22.15)

$$\left.\begin{aligned} \text{avec } \chi' &= \frac{4b^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mu\eta sS - (s+\mu c)C}{\mu^2\varepsilon}\cos\mu\xi d\mu \int_0^\infty \Phi(\omega)\cos\mu\omega d\omega \\ \chi'' &= \frac{4b^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\eta cS - sC}{\mu\varepsilon}\cos\mu\xi d\mu \int_0^\infty \psi(\omega)\sin\mu\omega d\omega \end{aligned}\right\} \quad (22.16)$$

expressions dans lesquelles :

$$s = \sin h\mu \qquad c = \cos h\mu \qquad S = \sin h\eta\mu \qquad C = \cos h\eta\mu \qquad \varepsilon = \sin h2\mu + 2\mu \quad (22.17)$$

L'identification de χ avec χ_{2r+1} conduit à :

$$\chi_{2r+1} = \sum_{n=o}^{\infty} (L_{2n}^{(r)} + M_{2n}^{(r)}\rho^2)\,\rho^{2n}\cos 2n\theta \quad (22.18)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{avec } L_o^{(r)} &= -4\int_o \{(s+\mu c)\Phi + \mu s\psi\}\frac{d\mu}{\mu\varepsilon} \\ L_{2n}^{(r)} &= \frac{4}{(2n)!}\int_o^\infty \left|s\{(n-1)\Phi - \mu\psi\} + c(n\psi - \mu\Phi)\right| \frac{\mu^{2n-1}}{\varepsilon}d\mu \\ M_{2n}^{(r)} &= \frac{2}{(2n+1)!}\int_o^\infty \frac{s\Phi + c\psi}{\varepsilon}\mu^{2n+1}d\mu \end{aligned}\right\} \quad (22.19)$$

et $\Phi = \dfrac{b^2}{\pi\mu}\displaystyle\int_o^\infty \Phi(\omega)\cos\mu\omega d\omega$

$$\psi = \frac{b^2}{\pi\mu}\int_o^\infty \psi(\omega)\sin\mu\omega d\omega$$

Les coefficients $M_{2n}^{(r)}$ et $L_{2n}^{(r)}$ peuvent alors se mettre sous la forme :

$$M_{2n}^{(r)} = {}^n\gamma_o D_o^{(r)} + \sum_{p=1}^{\infty}\{{}^n\gamma_p D_{2p}^{(r)} + {}^n\gamma_p E_{2p}^{(r)}\} \quad (22.20)$$

$$L_{2n}^{(r)} = {}^n\alpha_o D_o^{(r)} + \sum_{p=1}^{\infty}\{{}^n\alpha_p D_{2p}^{(r)} + {}^n\beta_p E_{2p}^{(r)}\} \quad (22.21)$$

et en posant $\begin{cases} I_s = \int_0^\infty \frac{\mu^s}{\varepsilon} d\mu \\ J_s = \int_0^\infty \frac{\mu^s}{\varepsilon} e^{-2\mu} d\mu \end{cases}$

$$n_{\gamma_o} = \frac{I_{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$n_{\gamma_p} = \frac{I_{2n+2p+1}}{(2n+1)!(2p-1)!}$$

$$n_{\delta_p} = \frac{1}{(2n+1)!(2p-2)!} \{ (2p-1) I_{2n+2p-1} - 2I_{2n+2p} + J_{2n+2p-1} \}$$

$$n_{\alpha_o} = \frac{1}{(2n)!} \{ (2n-1) I_{2n-1} - 2I_{2n} + J_{2n-1} \}$$

$$n_{\alpha_p} = \frac{1}{(2n)!(2p-1)!} \{ (2n-1) I_{2n+2p-1} - 2I_{2n+2p} + J_{2n+2p-1} \}$$

$$n_{\beta_p} = \frac{2}{(2n)!(2p-2)!} \{ (2(n+P-1) I_{2(n+p-1)} - (2np-n-p+1) I_{2n+2p-3} - 2I_{2n+2p-1} - (n+p-1) J_{2n+2p-3} \}$$

Nous obtenons ainsi les coefficient de χ_{2r+1} en fonction de χ_{2r}. Pour compléter le cycle, il reste à déterminer les coefficients de χ_{2r+2} en fonction de ceux de χ_{2r+1}.

Or, à partir de l'équation (22.18), par différenciation, nous obtenons les contraintes dues à χ_{2r+1} qui doivent être annulées sur le bord du trou par χ_{2r+2}.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2}{b^2} \Big| M_o^{(r)} - \sum_{n=1}^{\infty} \{ n(2n-1)L_{2n}^{(r)} + (n-1)(2n+1)M_{2n}^{(r)} \rho^2 \} \rho^{2n-2} \cos 2n\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{2}{b^2} \Big| M_o^{(r)} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ n(2n-1)L_{2n}^{(r)} + (n+1)(2n+1)M_{2n}^{(r)} \rho^2 \} \rho^{2n-2} \cos 2n\theta \\ \tau_{r\theta} &= \frac{2}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \{ n(2n-1)L_{2n}^{(r)} + n(2n+1)M_{2n}^{(r)} \rho^2 \} \rho^{2n-2} \sin 2n\theta \end{aligned}\right\} (22.22)$$

or χ_{2r+2} est de la forme :

$$\chi_{2r+2} = - D_o^{(r+1)} \log \rho + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \frac{D_{2n}^{(r+1)}}{\rho^{2n}} + \frac{E_{2n}^{(r+1)}}{\rho^{2n-2}} \} \cos 2n\theta$$

Pour $\rho = \lambda$, les contraintes engendrées par χ_{2r+2} doivent être égales et opposées aux contraintes données par les équations (22.22) d'où l'identifica-

tion :

$$\frac{D_o^{(r+1)}}{} = 2M_o^{(r)}$$

$$\frac{n(2n+1)}{\lambda^{2n+2}} D_{2n}^{(r+1)} + \frac{(n+1)(2n-1)}{\lambda^{2n}} E_{2n}^{(r+1)} = - \{n(2n-1)L_{2n}^{(r)}+(n-1)(2n+1)M_{2n}^{(r)}\lambda^2\}\lambda^{2n-2}$$

$$\frac{n(2n+1)}{\lambda^{2n+2}} D_{2n}^{(r+1)} + \frac{n(2n-1)}{\lambda^{2n}} E_{2n}^{(r+1)} = \{n(2n-1)L_{2n}^{(r)}+n(2n+1)M_{2n}^{(r)}\lambda^2\}\lambda^{2n-2}$$

Nous obtenons ainsi les relations :

$$\left.\begin{aligned} D_o^{(r+1)} &= 2M_o^{(r)}\lambda^2 \\ D_{2n}^{(r+1)} &= \lambda^{4n}\{ (2n-1)L_{2n}^{(r)} + 2n\lambda^2 M_{2n}^{(r)}\} \\ E_{2n}^{(r+1)} &= -\lambda^{4n-2} \{ 2nL_{2n}^{(r)} + (2n+1)\lambda^2 M_{2n}^{(r)}\} \end{aligned}\right\} (22.23)$$

Ces coefficients permettent les itérations successives à partir de χ_o

Le calcul des coefficients M et L nécessite la résolution des intégrales I_s et J_s dont dépendent α, β, γ . Les résultats peuvent être fournis sous forme de tableaux donnant la valeur de α, β, γ en fonction de p. Néanmoins, la longueur des calculs contraint à se limiter à des valeurs faibles de p; ce qui est une restriction à l'emploi de la méthode ci-dessus décrite. On constate heureusement que la méthode converge rapidement pour les valeurs de $\lambda = a/b$ inférieures à 0,5. Par ailleurs, elle présente l'avantage d'être utilisable pour tout mode de chargement pourvu que les symétries par rapport à l'axe de la plaque et par rapport au diamètre du trou perpendiculaire à l'axe de la plaque soient respectées.

2,22 - *Application à la plaque en traction* -

Dans le cas où le bord du trou n'est pas chargé, les fonctions de contraintes de départ s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned} \chi'_o &= \frac{1}{4} b^2 p\rho^2(1+\cos 2\theta) \\ \chi_o &= \frac{1}{4} b^2 p \left|-2\lambda^2 \log \rho-(2\lambda^2-\frac{\lambda^4}{\rho^2})\cos 2\theta\right. \end{aligned}\right\} (22.24)$$

Il en résulte les contraintes suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{r_o} &= \frac{1}{2}\,p\,\left|(1-\frac{\lambda^2}{\rho^2}) - (1-4\frac{\lambda^2}{\rho^2}+3\frac{\lambda^4}{\rho^4})\cos 2\theta\right| \\
\sigma_{\theta_o} &= \frac{1}{2}\,p\,\left|(1+\frac{\lambda^2}{\rho^2}) + (1+3\frac{\lambda^4}{\rho^4})\cos 2\theta\right| \\
\tau_{r\theta_o} &= \frac{1}{2}\,p\,\left(1+2\frac{\lambda^2}{\rho^2}-3\frac{\lambda^4}{\rho^4}\right)\sin 2\theta
\end{aligned}\right\} \quad (22.25)$$

L'identification avec les équations (22.8), (22.9) et (22.10) donne :

$$D_o^{(o)} = \frac{1}{2}\,b^2 p\lambda^2 \qquad D_2^{(o)} = \frac{1}{4}\,b^2 p\lambda^3 \qquad E_2^{(o)} = -\frac{1}{2}\,b^2 p\lambda^2 \qquad (22.26)$$

les autres coefficients étant tous nuls.

Les équations (22.20) et (22.21) deviennent alors :

$$\begin{aligned}
L_{2n}^{(o)} &= b^2 p\lambda^2\,\{\frac{1}{2}\,({}^n\alpha_o - {}^n\beta_1) + \frac{1}{4}\,{}^n\alpha_1\lambda^2\} \\
M_{2n}^{(o)} &= b^2 p\lambda^2\,\{\frac{1}{2}\,({}^n\gamma_o - {}^n\delta_n) + \frac{1}{4}\,{}^n\gamma_1\lambda^2\}
\end{aligned} \qquad (22.27)$$

A partir de là, il est aisé de calculer les valeurs des coefficients de χ_1, de même pour ceux de χ_2, λ restant un paramètre. Cependant, lorsque l'on veut poursuivre l'itération, les calculs sont plus simples en donnant des valeurs numériques à λ. Les différents coefficients ont été calculés par Howland pour $\lambda = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}4$; $0{,}5$.

En posant : $d_o^{(r)} = D_o^{(r)}/b^2 p \qquad d_{2n}^{(r)} = D_{2n}^{(r)}/b^2 p$

$$e_{2n}^{(r)} = E_{2n}^{(r)}/b^2 p \qquad \ell_{2n}^{(r)} = L_{2n}^{(r)}/b^2 p$$

$$m_o^{(r)} = M_o^{(r)}/b^2 p \qquad m_{2n}^{(r)} = M_{2n}^{(r)}/b^2 p$$

il est possible de dresser des tables donnant les valeurs numériques de ces coefficients. Les itérations ont été faites jusqu'à ce que les contraintes résiduelles sur le bord de la plaque soient inférieures à 0,01 p. Etant donné l'intérêt de la distribution des contraintes sur le bord du trou, l'itération a été arrêtée à un ordre tel qu'en cet endroit les contraintes résiduelles soient nulles. Les coefficients étant calculés, il reste à faire la sommation des fonctions de contraintes pour obtenir la fonction finale :

$$\chi = \frac{1}{4}\,b^2 p\rho^2(1+\cos 2\theta) + b^2 p\,\left|-d_o \log\rho + m_o\rho^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{d_{2n}}{\rho^2} + \frac{e_{2n}}{\rho^{2n-2}} + (\ell_{2n} + m_{2n}\rho^2)\rho^{2n}\}\cos 2n\theta\right| \quad (22.28)$$

θ	$\lambda = 0$	$\lambda = 0,1$	$\lambda = 0,2$	$\lambda = 0,3$	$\lambda = 0,4$	$\lambda = 0,5$
0°	3,00	3,03	3,14	3,36	3,74	4,32
15°	2,73	2,74	2,85	3,03	3,32	3,72
30°	2,00	2,01	2,07	2,15	2,25	2,32
45°	1,00	1,00	1,00	0,98	0,91	0,77
60°	0,00	-0,01	-0,06	-0,15	-0,30	-0,51
75°	-0,73	-0,74	-0,82	-0,95	-1,12	-1,32
90°	-1,00	-1,03	-1,11	-1,26	-1,44	-1,58

tableau (22-2) Concentration de contraintes $K = \frac{\overline{\theta\theta}}{P}$ au bord du trou

tableau (22-4) Valeurs de $\frac{\sigma_\theta}{P}$ dans la section minimum

ρ	$\lambda = 0,1$	$\lambda = 0,2$	$\lambda = 0,3$	$\lambda = 0,4$	$\lambda = 0,5$
0,1	3,03				
0,2	1,23	3,14			
0,3	1,08	1,57	3,36		
0,4	1,04	1,26	1,93	3,74	
0,5	1,03	1,16	1,47	2,30	4,32
0,6	1,02	1,11	1,28	1,75	2,75
0,7	1,01	1,07	1,17	1,48	2,04
0,8	1,01	1,05	1,07	1,28	1,61
0,9	1,00	1,01	0,96	1,08	1,22
1,0	0,99	0,97	0,89	0,81	0,73

avec $d_o = \sum_r d_o^{(r)}$ $\qquad d_{2n} = \sum_r d_{2n}^{(r)}$

$e_{2n} = \sum_r e_{2n}^{(r)}$ $\qquad \ell_{2n} = \sum_r \ell_{2n}^{(r)}$

$m_o = \sum_r m_o^{(r)}$ $\qquad m_{2n} = \sum_r m_{2n}^{(r)}$

Nous en déduisons les expressions finales pour les contraintes :

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= p\left|\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) + 2m_o - \frac{d_o}{\ell^2}\right. \\
&\quad -2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n(2n+1)d_{2n}}{\rho^{2n+2}} + \frac{(n+1)(2n-1)e_{2n}}{\rho^{2n}} + n(2n-1)\ell_{2n}\rho^{2n-2} + (n-1)(2n+1)m_{2n}\rho^{2n}\right\}\cos 2n\theta\Big| \\
\sigma_\theta &= p\left|\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) + 2m_o + \frac{d_o}{\ell^2}\right. \\
&\quad +2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n(2n+1)d_{2n}}{\rho^{2n+2}} + \frac{(n-1)(2n-1)e_{2n}}{\rho^{2n}} + n(2n-1)\ell_{2n}\rho^{2n-2} + (n+1)(2n+1)m_{2n}\rho^{2n}\right\}\cos 2n\theta\Big| \\
\tau_{r\theta} &= p\left|\frac{1}{2}\sin 2\theta + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n(2n-1)\left(\ell_{2n}\rho^{2n-2} - \frac{e_{2n}}{\rho^{2n}}\right) + n(2n+1)\left(m_{2n}\rho^{2n} - \frac{d_{2n}}{\rho^{2n+2}}\right)\right\}\sin 2n\theta\right.
\end{aligned}\right\} \qquad (22.29)$$

2,221 - Contraintes au bord du trou -

Sur la circonférence du trou non chargé, nous avons $\sigma_r = \tau_{r\theta} = o$ et en faisant $\rho = \lambda$ dans la 2ème équation (22.29) nous obtenons :

$$\sigma_\theta = p(q_o + q_2 \cos 2\theta + q_4 \cos 4\theta + \ldots) \qquad (22.30)$$

avec $q_o = \frac{1}{2} + 2\,m_o + d_o/\lambda^2$

$q_2 = \frac{1}{2} + 6\,d_2/\lambda^4 + 2\,\ell_2 + 12\,m_2\,\lambda^2$

$q_4 = 20\,d_4/\lambda^6 + 6\,e_4/\lambda^4 + 12\,\ell_4\lambda^2 + 30\,m_4\,\lambda^4$

$q_6 = 42\,d_6/\lambda^8 + 20\,e_6/\lambda^6 + 30\,\ell_6\lambda^4 + 56\,m_6\,\lambda^6$

$q_8 = 72\,d_8/\lambda^{10} + 42\,e_8/\lambda^8 + 56\,\ell_8\,\lambda^6 + 90\,m_8\,\lambda^8$

Les valeurs ainsi obtenues ont été portées dans le tableau (22.2) et sur le graphique (22.3).

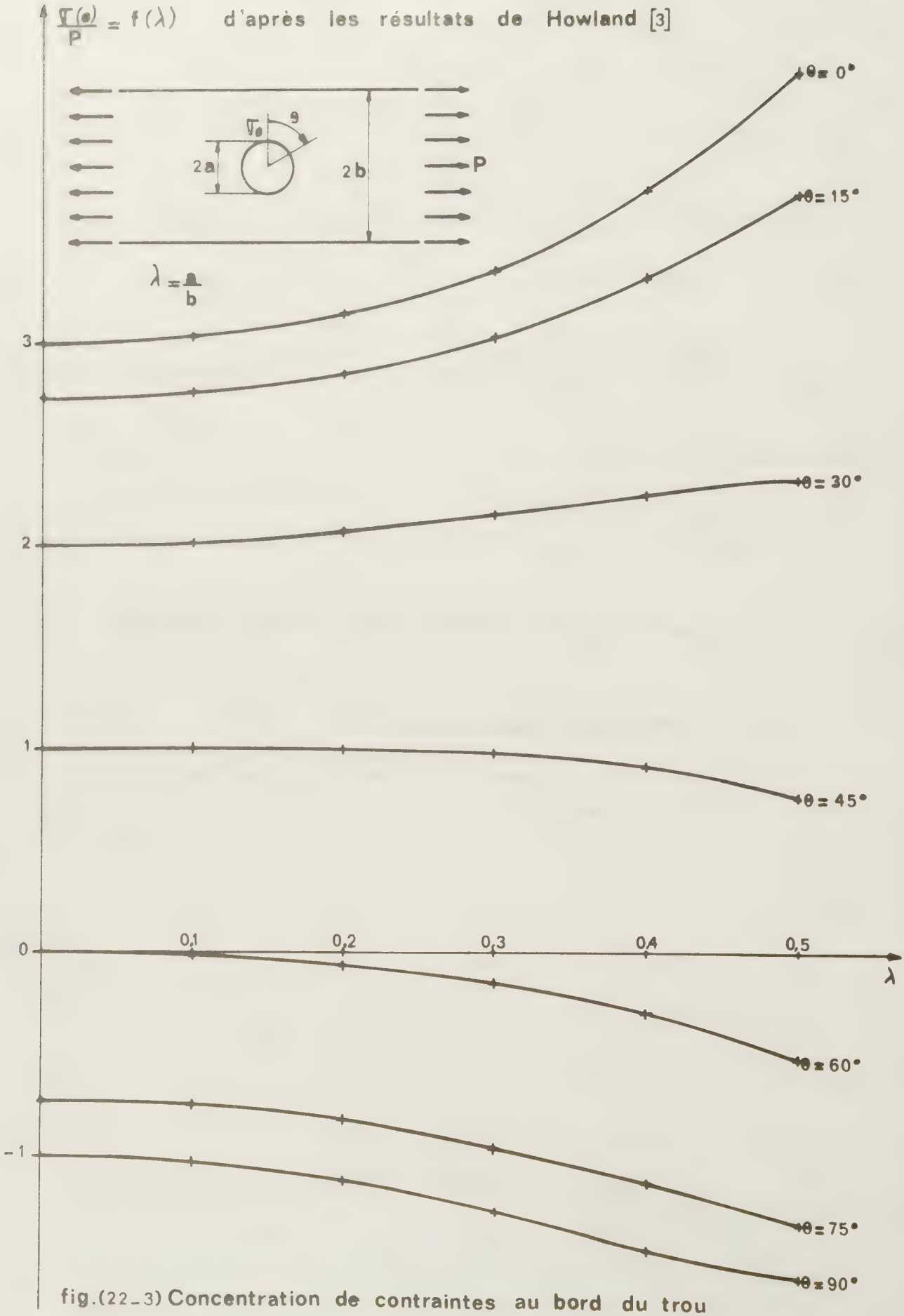


fig.(22_3) Concentration de contraintes au bord du trou

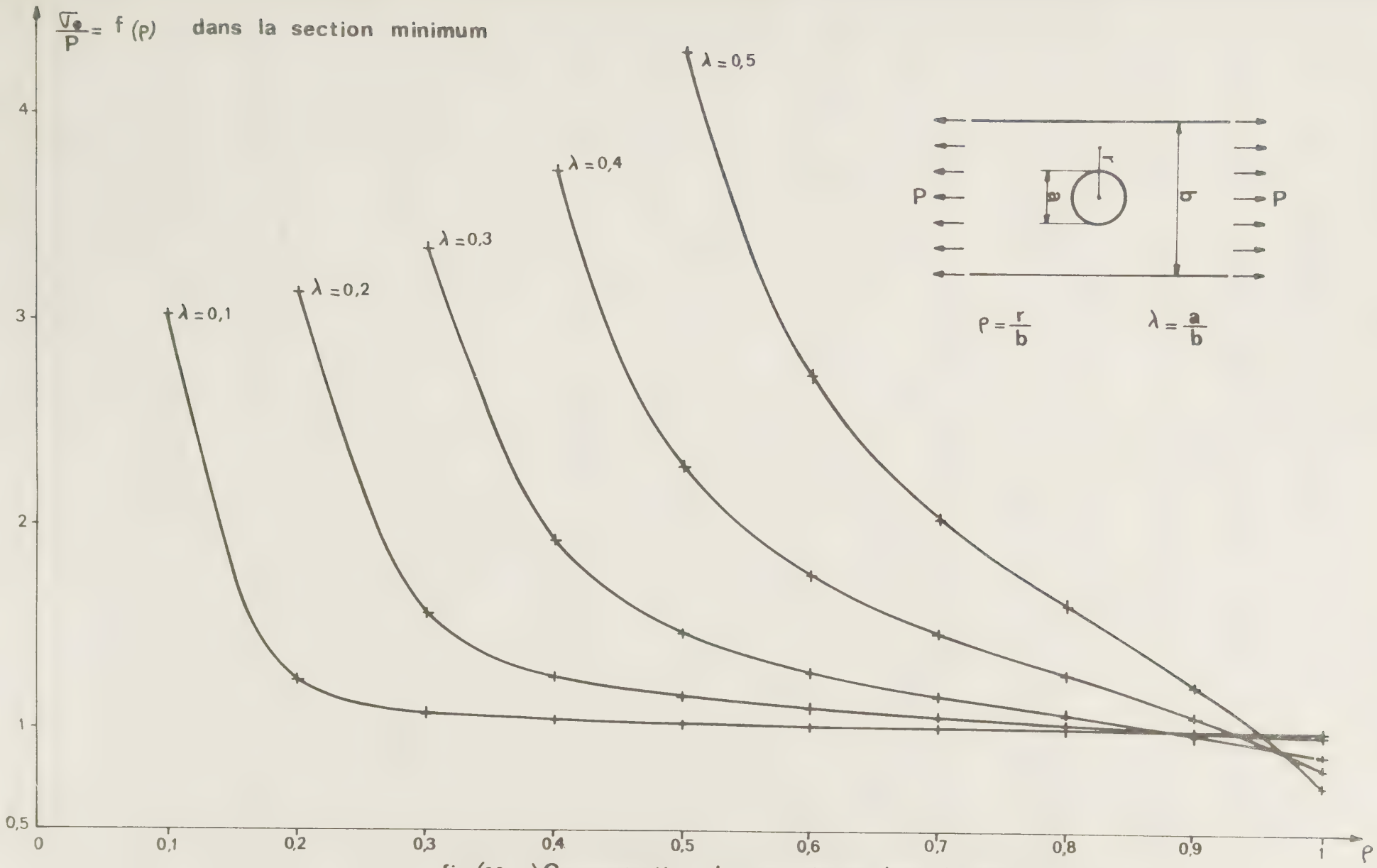


fig.(22_5) Concentration de contraintes dans la section minimum

2,222 - *Contraintes dans la section minimale*.

Pour obtenir l'expression de ces contraintes, il suffit de faire $\theta = 0$ dans l'équation (22.29) donnant σ_θ

$$\sigma_\theta = p \left| (1+2m_o+2\ell_2) + 12(m_2+\ell_4)\rho^2 + 30(m_4+\ell_6)\rho^4 + 56(m_6+\ell_8)\rho^6 + 90(m_8+\ell_{10})\rho^8 + \ldots + \frac{d_o}{\rho^2} + \frac{6(d_2+e_4)}{\rho^4} + \frac{20(d_4+e_6)}{\rho^6} + \frac{42(d_6+e_8)}{\rho^8} + \ldots \right| \quad (22.31)$$

Cette série converge lentement et il est nécessaire de retenir les termes en ρ jusqu'à la puissance 12. Les résultats obtenus à partir de la relation (22.31) sont portés dans la table (22.4) et sur le graphique (22.5).

2,3 - *REPARTITION DES CONTRAINTES DANS UNE PLAQUE INFINIE PERCEE D'UN TROU ELLIPTIQUE, EN TRACTION UNIFORME* -

Solution en coordonnées elliptiques

La première solution à ce problème est due à Kolosoff |7| puis la méthode a été reprise et développée par nombre d'auteurs dont notamment Timoshenko et Goodier |8| , Stevenson |9| , Coker et Filon |10| .

Cherchons la fonction de contraintes satisfaisant l'équation différentielle : $\nabla^4(U) = 0$. Soit $P = \nabla^2 U$ la somme des contraintes normales, qui est une fonction harmonique dont le conjugué est Q ; $f(z) = P + iQ$ est alors une fonction analytique.

Soit $\phi(z)$ une autre fonction analytique : $\phi(z) = p+iq = \frac{1}{4} f(z)dz$ ou encore $\phi'(z) = \frac{1}{4} f(z)$. Nous avons aussi :

$$\frac{\delta p}{\delta x} + i\frac{\delta q}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x}\phi(z) = \phi'(z)\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{1}{4} f(z) = \frac{1}{4}(P + iQ)$$

En identifiant les parties réelles du premier et du dernier membre de cette suite d'égalités : $\frac{\delta p}{\delta x} = \frac{1}{4} P$

Comme p et q sont des fonctions conjuguées : $\frac{\delta q}{\delta y} = \frac{1}{4} P$

Ces relations et $p = \nabla^2 U$ montrent que le laplacien de la fonction $(U-xp-yq)$ est nul donc celle-ci est harmonique. En posant : $p_1 = U-xp-yp$, U peut se mettre sous la forme $U = xp+yq+p_1$.

Introduisons la fonction potentielle $\chi(z) = p_1 + iq_1$ et en remarquant que $R_e \left| (x-iy)(p+iq)+p_1+iq_1 \right| = xp+yq+p_1$:

$$U = R_e \left| \bar{z}\,\phi(z) + \chi(z) \right| \quad (23.1)$$

ou encore $2U = \bar{z}\,\phi(z) + \chi(z) + z\,\bar{\phi}(\bar{z}) + \bar{\chi}(\bar{z})$ (23.2)

Par différenciations successives de (23.2), il vient :

$$\frac{\delta^2 U}{\delta x^2} + i\,\frac{\delta^2 U}{\delta x \delta y} = \phi'(z) + z\,\bar{\phi}''(\bar{z}) + \bar{\phi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z})$$

$$i\frac{\delta^2 U}{\delta x \delta y} - \frac{\delta^2 U}{\delta y^2} = -\,\phi'(z) + z\,\bar{\phi}''(\bar{z}) - \bar{\phi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z})$$

d'où l'expression des contraintes :

$$\sigma_y + \sigma_x = 2\phi'(z) + 2\bar{\phi}'(\bar{z}) = 4\,R_e\left|\phi'(z)\right| \qquad (23.3)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau xy = 2\,\left|\bar{z}\,\phi''(z) + \chi''(z)\right| \qquad (23.4)$$

Expression des contraintes en coordonnées curvilignes: (Fig. 23.1)

soit σ_ξ composante normale aux courbes ξ = cte

σ_η composante normale aux courbes η = cte

$\tau_{\xi\eta}$ composante du cisaillement sur les deux courbes.

Nous obtenons ainsi les équivalences

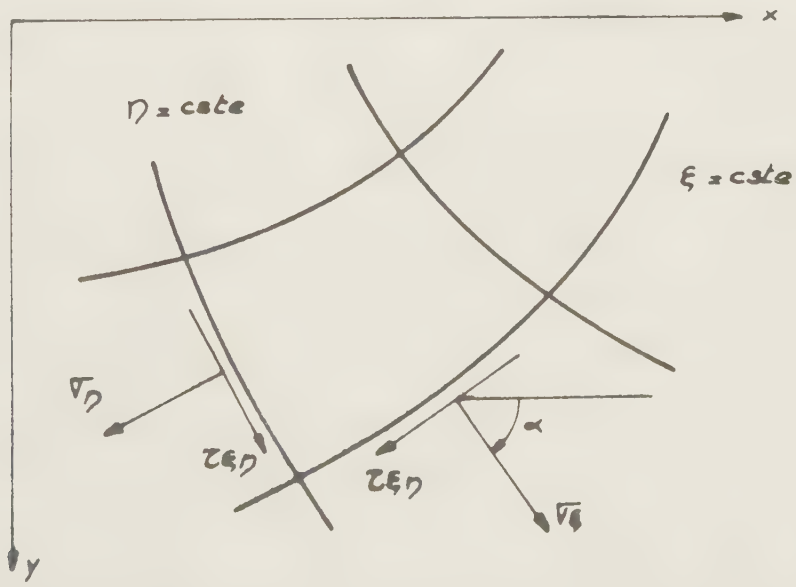


Fig. 23.1 - Coordonnées curvilignes

$$\sigma_\xi = \frac{1}{2}\,(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\,(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\,\frac{1}{2}\,(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

et $\tau_\eta = \frac{1}{2}\,(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\,(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$

Entre les contraintes en coordonnées cartésiennes et les contraintes en coordonnées curvilignes, nous avons les relations

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_x + \sigma_y \qquad (23.5)$$

$$\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} = e^{2i\alpha}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\,\tau_{xy}) \qquad (23.6)$$

Le facteur $e^{2i\alpha}$ est défini à partir de l'équation de la courbe $z = f(\zeta)$:

Le rapprochement des équations (23.3) et (23.4) avec les équations (23.5) et (23.6) conduit à :

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = 2\left|\phi'(z) + \bar{\phi}'(\bar{z})\right| = 4\,R_e\left|\phi'(z)\right| \qquad (23.7)$$

$$\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} = 2e^{2i\alpha}\left|\bar{z}\,\phi''(z) + \chi''(z)\right| \qquad (23.8)$$

Considérons une plaque infinie en traction simple p faisant un angle β avec la direction positive de l'axe des x portant le grand axe d'un trou elliptique (Fig. 23.2).

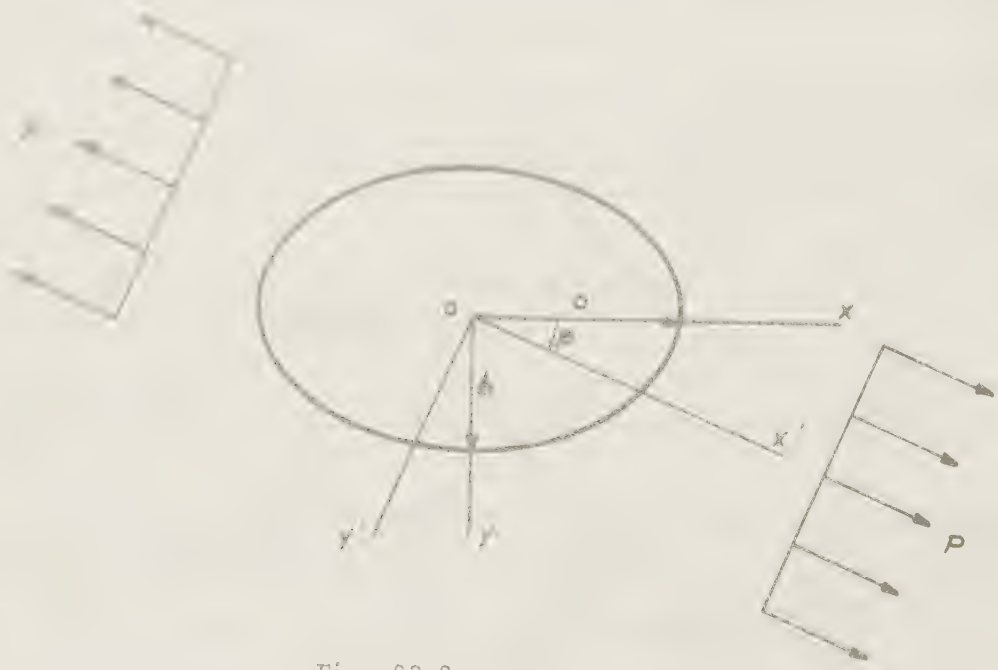


Fig. 23.2

x' et y' étant les axes respectivement parallèle et perpendiculaire à la direction de p, nous avons les relations :

d'où les conditions à l'infini

$$\sigma_x + \sigma_y = p \qquad \sigma_y - \sigma_x + 2i\,\tau_{xy} = -p\,e^{-2i\beta}$$

Les équations (23.3) et (23.4) deviennent alors :

$$4\,R_e|p'(z)| = p \quad \text{et} \quad 2\,|\bar{z}\,\phi''(z) + \chi''(z)| = -pe^{-2i\beta} \text{ à l'infini} \qquad (23.9)$$

d'autre part, sur la frontière du trou : $\xi = \xi_o$ et $\sigma_\xi = \tau_{\xi\eta} = 0$

Ces conditions aux limites sont satisfaites en prenant $\phi(z)$ et $\chi(z)$

sous la forme : $4\,\phi(z) = Ac \cos h\zeta + Bc \sin h\zeta$

$$4\,\chi(z) = Cc^2\zeta + Dc^2 \cos h2\zeta + Ec^2 \sin h2\zeta$$

A, B, C, D, E étant des constantes et $c^2 = a^2 - b^2$. Ce résultat est dû à Stevenson |9| . Il reste à calculer ces constantes.

Comme $z = c \cos h\zeta$, le terme $Ac \cos h\zeta$ devient Az et dans la fonction de contraintes U (23.1) il introduira un terme en $R_e|Az\bar{z}|$ ou $R_e|Ar^2|$. Si A est imaginaire, cette quantité sera nulle donc A peut être pris réel et par un raisonnement analogue on montre que de même C doit être réel. En posant :

$B = B_1 + iB_2$, $D = D_1 + iD_2$, $E = E_1 + iE_2$ et en reportant les expressions de $\phi(z)$ et $\chi(z)$ dans les conditions (23.9), nous obtenons :

$$A + B_1 = p \qquad 2\,(D+E) = -pe^{-2i\beta} \qquad (23.10)$$

D'autre part, en retranchant l'équation (23.8) de (23.7) nous obtenons :

$$4(\sigma_\xi - i\tau_{\xi\eta}) = \frac{1}{\sin h\bar{\zeta}}\,\Big|(2A + B \operatorname{cotg} h\zeta) \sin h\bar{\zeta} + \Big(\bar{B} + B\,\frac{1}{\sin h^2\zeta}\Big) \cos h\bar{\zeta} +$$

$$(C + 2E) \operatorname{cotg} h\zeta\,\frac{1}{\sin h\zeta} - 4D \sin h\zeta - 4E \cos h\zeta\Big|$$

Sur le bord du trou : $\xi = \xi_o$ et $\bar{\zeta} = 2\,\xi_o - \zeta$, ces valeurs reportées dans l'équation précédente, nous obtenons pour l'expression entre crochets :

$$(2A \sin h2\xi_o - 2iB_2 \cos h2\xi_o - 4E) \cos h\zeta$$

$$- (2A \cos h2\xi_o - 2iB_2 \sin h2\xi_o + 4D) \sin h\zeta$$

$$+ (C + 2E + B \cos h2\xi_o) \operatorname{cotg} h\zeta\,\frac{1}{\sin h\zeta}$$

Pour que $(\sigma_\xi - i\tau_{\xi\eta})$ s'annule au bord du trou, les coefficients de $\cos h\zeta$, $\sin h\zeta$ et $\operatorname{cotg} h\zeta\,\frac{1}{\sin h\zeta}$ doivent s'annuler. Nous pouvons ainsi calculer les constantes :

$$\frac{1}{2}\, pe^{2\xi_0} \cos h2\,(\xi_0 + i\beta)$$

$$E = \frac{1}{2}\, pe^{2\xi_0} \sin h2\,(\xi_0 + i\beta)$$

$$C = -\,p(\cos h2\xi_0 - \cos 2\beta)$$

Nous obtenons ainsi les potentiels complexes :

$$4\phi(z) = pc\,\left|e^{2\xi_0} \cos 2\beta \;\cos h\zeta \;+\; (1-e^{2\xi_0 + 2i\beta}) \sin h\zeta\right|$$

$$4\chi(z) = -pc^2\left|(\cos h2\xi_0 - \cos 2\beta)\zeta + \frac{1}{2}\, e^{2\xi_0} \cos h2(\zeta-\xi_0 - i\beta)\right|$$

Il est possible d'en déduire les déplacements et les contraintes. En particulier, la contrainte σ_η au bord du trou peut être obtenue à partir de (23.7) car σ_ξ est nul :

$$(\sigma_\eta)_{\xi = \xi_0} = p\,\frac{\sin h2\xi_0 + \cos 2\beta \;-\; e^{2\xi_0} \cos 2(\beta-\eta)}{\cos h2\xi_0 - \cos 2\eta}$$

et quand la traction p est perpendiculaire au grand axe ($\beta = \frac{\pi}{2}$)

$$(\sigma_\eta)_{\xi = \xi_0} = pe^{2\xi_0}\left|\frac{\sin h2\xi_0\,(1+e^{-2\xi_0})}{\cos h2\xi_0 - \cos 2\eta} - 1\right|$$

le maximum est obtenu aux extrêmités du grand axe ($\cos 2\eta = 1$)

$$(\sigma_\eta)_{max} = p(1 + 2\,\frac{a}{b})$$

et lorsque a = b (cas du cercle) nous retrouvons le coefficient de majoration de contrainte : 3.

Cette méthode, quoique assez rapide a l'inconvénient de n'être applicable qu'aux trous de forme elliptique. Nous verrons, dans le chapitre suivant, qu'il y a une méthode, celle de Muskhelishvili |11| , complétée par G.N. Savin |12| , beaucoup plus générale.

2,4 - *DISTRIBUTION DES CONTRAINTES DANS UNE PLAQUE INFINIE, ISOTROPE ET PERCEE D'UN TROU* -

Méthode de résolution de G.N. SAVIN |12|

Considérons une plaque plane, infinie, dans un état de contrainte donné, et appelons $U_0(x,y)$ la fonction de contraintes qui y correspond. Un trou de forme quelconque dans cette plaque provoque une redistribution des contraintes de

σ_x° , σ_y° , τ_{xy}° pour la plaque pleine à σ_x , σ_y , τ_{xy} dans la plaque percée.

Supposons l'origine des coordonnées x et y à l'intérieur du trou et appelons état de contraintes de base celui de la plaque sans trou. Le nouvel état de contraintes σ_x, σ_y, τ_{xy} dans la même plaque percée peut être exprimé par :

$$\sigma_x = \sigma_x^\circ + \sigma_x^*$$

$$\sigma_y = \sigma_y^\circ + \sigma_y^*$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^\circ + \tau_{xy}^*$$

où σ_x^* , σ_y^* , τ_{xy}^* sont les contraintes additionnelles dues à la présence du trou. Nous avons vu que la fonction U(x,y) vérifiant l'équation biharmonique

$\frac{\delta^4 U}{\delta x^4} + 2\frac{\delta^4 U}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 U}{\delta y^4} = 0$ pouvait se mettre sous la forme (23.1) :

$$U(x,y) = R_e \left| \bar{z}\phi_1(z) + \chi_1(z) \right| \qquad (24.1)$$

$\phi_1(z)$ et $\chi_1(z)$ étant des fonctions analytiques des variables complexes z et $\bar{z}$. En posant $\psi_1(z) = \frac{d\,\chi_1\,(z)}{dz}$, le problème consiste à déterminer les fonctions dites de Muskhelishvili |11| :

- $\phi^\circ(z)$ et $\psi^\circ(z)$ dans la plaque non trouée correspondant aux contraintes σ_x°, σ_y° et τ_{xy}°
- $\phi^*(z)$ et $\psi^*(z)$ dans la plaque trouée correspondant aux contraintes additionnelles σ_x^* , σ_y^* , τ_{xy}^*

Ainsi les fonctions de contraintes finales seront de la forme :

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= \phi^\circ(z) + \phi^*(z) \\ \psi_1(z) &= \psi^\circ(z) + \psi^*(z) \end{aligned} \qquad (24.2)$$

La détermination des fonctions $\phi^\circ(z)$ et $\psi^\circ(z)$ est classique lorsque l'état de contraintes initial est fixé. Il reste à déterminer les fonctions $\phi^*(z)$ et $\psi^*(z)$.

L'influence du trou sur la distribution des contraintes est de nature locale seulement, les contraintes σ_x^* , σ_y^* et τ_{xy}^* décroissent rapidement lorsque l'on s'éloigne du trou. De ce fait, on suppose que les fonctions $\phi^*(z)$ et $\psi^*(z)$ qui caractérisent cet état de contrainte sont holomorphes dans la région extérieure au trou et sont par exemple de la forme :

$$\phi^*(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

$$\psi^*(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$$

Faisons une transformation conforme de la zone étudiée S (extérieure au trou) en zone intérieure au cercle unité γ. Soit $\omega(\zeta)$ cette fonction qui relie le plan des z où est repéré le trou au plan des ζ où se trouve le cercle unité.

Les fonctions de contraintes s'écriront alors :

$$\begin{aligned} \phi_1|\omega(\zeta)| &= \phi^\circ|\omega(\zeta)| + \phi^*|\omega(\zeta)| \\ \psi_1|\omega(\zeta)| &= \psi^\circ|\omega(\zeta)| + \psi^*|\omega(\zeta)| \end{aligned} \tag{24.3}$$

Introduisons les notations :

$$\phi_1|\omega(\zeta)| = \phi(\zeta) \qquad \psi_1|\omega(\zeta)| = \psi(\zeta)$$

$$\phi^\circ|\omega(\zeta)| = \phi^1(\zeta) \qquad \psi^\circ|\omega(\zeta)| = \psi^1(\zeta)$$

$$\phi^*|\omega(\zeta)| = \phi_o(\zeta) \qquad \psi^*|\omega(\zeta)| = \psi_o(\zeta)$$

Les fonctions (24.3) seront alors de la forme :

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) &= \phi^1(\zeta) + \phi_o(\zeta) \\ \psi(\zeta) &= \psi^1(\zeta) + \psi_o(\zeta) \end{aligned} \tag{24.4}$$

$$\text{où } \phi_o(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta^n \quad \text{et } \psi_o(\zeta) = \sum_{n=o}^{\infty} \beta_n \zeta^n \tag{24.5}$$

Sur un élément de frontière, soient X_n et Y_n les contraintes appliquées. A partir des expression des contraintes :

$$\sigma_x = \frac{\delta^2 U}{\delta y^2} \qquad \sigma_y = \frac{\delta^2 U}{\delta x^2} \qquad \tau_{xy} = \frac{\delta^2 U}{\delta x \delta y}$$

et en appelant n et s les directions normale et tangentielle à la frontière, Muskhelishvili |11| a montré que :

$$\frac{\delta U}{\delta x} + i\frac{\delta U}{\delta y} = \phi_1(z) + z\overline{\phi'_1(z)} + \overline{\psi_1(z)} = i\int_o^s (X_n + iY_n)\, d_s + C = f_1 + if_2 + cte \tag{24.6}$$

Pour déterminer les fonctions inconnues $\phi_o(\zeta)$ et $\psi_o(\zeta)$, reportons les fonctions (24.4) dans les conditions aux limites (24.6). En multipliant les deux

membres de cette équation par $\frac{1}{2\pi i}\ \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$ où ζ est un point intérieur au cercle unité γ et σ un point de ce cercle puis en intégrant sur ce cercle γ, nous obtenons deux équations :

$$\left.\begin{aligned} \phi_o(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\ \overline{\phi'_o(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} + \overline{\beta}_o &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1^\circ + if_2^\circ}{\sigma-\zeta}\,d\sigma \\ \psi_o(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\ \phi'_o(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1^\circ - if_2^\circ}{\sigma-\zeta}\,d\sigma \end{aligned}\right\} \quad (24.7)$$

dans lesquelles $f_1^\circ + if_2^\circ$ représente les conditions aux limites des fonctions $\phi_o(\zeta)$ et $\psi_o(\zeta)$ qui sont de la forme :

$$f_1^\circ + if_2^\circ = f_1 + if_2 - \left| \phi^1(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\ \overline{\Phi'^1(\sigma)} + \overline{\psi^1(\sigma)}\right|$$

↓	↓	↓
Conditions aux limites pour ϕ_o et ψ_o	Conditions aux limites réelles	Conditions aux limites dans la plaque non trouée obtenue à partir de (24.6) pour $z = \omega(\sigma)$

Les fonctions $\phi_o(\zeta)$ et $\psi_o(\zeta)$ calculées à partir de (24.7) et reportées dans les équations (24.4) nous donnent la forme finale des fonctions de contraintes $\phi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$.

Pour déterminer les contraintes σ_ρ, σ_θ et $\tau_{\rho\theta}$ dans le système de coordonnées curvilignes, il suffit de reporter la valeur de ces fonctions de Kolosoff-Muskhelishvili |11| :

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\ \left|\phi'_1(z) + \overline{\phi'_1(z)}\right|$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\ \left|\bar{z}\ \phi''_1(z) + \psi'_1(z)\right|$$

où en remplaçant z par $\omega(\zeta)$ et en posant $\Phi(\zeta) = \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$ et $\Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\rho + \sigma_\theta &= 2\ \left|\ \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}\right| \\ \sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} &= \frac{2\zeta^2}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}}\ \left|\overline{\omega(\zeta)}\,\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\Psi(\zeta)\right| \end{aligned}\right\} \quad (24.8)$$

Sur le bord du trou, si aucune force n'est appliquée, la contrainte σ_0 est déterminée directement par la première équation (24.8) en posant $\sigma_\rho = 0$ pour $\rho = 1$

$$\text{d'où : } \sigma_\theta = R_e\ \left|\frac{\phi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\right| \quad (24.9)$$

expression dans laquelle $\sigma = e^{i\theta}$ est la valeur de la variable $\zeta = \rho e^{i\theta}$ sur le bord du trou.

La détermination de la fonction de contraintes pour l'état de contraintes de base (plaque sans trou) est obtenue à partir de l'équation :

$$\Delta U_o(x,y) = \frac{\delta^2 U_o}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 U_o}{\delta y^2} = 4R_e \left|\phi'^\circ(z)\right| \tag{24.10}$$

La partie réelle de $\phi'^\circ(z)$ est alors parfaitement déterminée.
En posant $\phi'^\circ(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ nous obtenons la partie imaginaire de $\phi'^\circ(z)$ à l'aide des équations différentielles :

$$\frac{\delta P(x,y)}{\delta x} = \frac{\delta Q(x,y)}{\delta y} \text{ et } \frac{\delta P(x,y)}{\delta y} = -\frac{\delta Q(x,y)}{\delta x} \tag{24.11}$$

De ces équations, il résulte que $Q(x,y)$ est déterminé par une équation différentielle du premier ordre donc la fonction $\phi^{\circ\prime}(z)$ sera déterminée à une constante imaginaire près : ic_1 et dans la fonction $\phi^\circ(z)$ nous retrouverons une expression : $ic_1 z + c_2$. Néanmoins, dans les expressions (24.8) donnant $\sigma_\rho + \sigma_\theta$ et $\sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta}$, les constantes c_1 et c_2 peuvent être fixées arbitrairement. En donnant la valeur zéro à ces constantes, la fonction $\phi^\circ(z)$ est complètement déterminée.

La fonction $\psi^\circ(z)$ ou, ce qui est la même chose, $\chi^\circ(z)$ car $\psi^\circ(z) = \chi'^\circ(z)$ est déterminée à partir de l'équation (24.1).

En posant $\chi^\circ(z) = R(x,y) + iS(x,y)$ nous obtenons :

$$R(x,y) = U_o(x,y) - \frac{1}{2}\left|\bar{z}\,\phi^\circ(z) + z\,\bar{\phi}^\circ(z)\right| \tag{24.12}$$

et $S(x,y)$ est déterminé comme $Q(x,y)$ à partir des équations différentielles (24.11). En conséquence, la fonction $\chi^\circ(z)$ sera de la forme ;

$$\chi^\circ(z) = R(x,y) + iS(x,y) + ic_3 \tag{24.13}$$

Ainsi pour l'état de contraintes de base (plaque sans trou) deux fonctions $\phi^\circ(z)$ et $\psi^\circ(z)$ ont été déterminées. Selon la forme du trou, il est néanmoins nécessaire de faire la transformation conforme et de remplacer z par $\omega(\zeta)$ afin d'obtenir les expressions des fonctions $\phi^1(z)$ et $\psi^1(z)$ des équations (24.4) et (24.7).

2,41 - *Tension dans une direction donnée*

Si une plaque est soumise à une contrainte p dans une direction faisant un angle α avec l'axe x, les contraintes de base dans la plaque sont données par les relations :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= p\cos^2\alpha \\ \sigma_y &= p\sin^2\alpha \\ \tau_{xy} &= p\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad (24.14)$$

et la fonction de contraintes initiale sera de la forme :

$$U_o(x,y) = \frac{p}{2}(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 \quad (24.15)$$

Déterminons les fonctions de contraintes correspondantes $\phi^\circ(z)$ et $\psi^\circ(z)$. Des relations (24.15) et (24.10) il découle que : $P(x,y) = p/4$ et l'équation (24.11) montre que $Q(x,y) = 0$ d'où :

$$\frac{d\,\phi^\circ(z)}{dz} = \frac{1}{4}p \quad (24.16)$$

et $\phi^\circ(z) = \frac{1}{4}pz$ (24.17)

$R(x,y)$ de la fonction $\chi^\circ(z)$ est déterminé à l'aide (24.12)

$$R(x,y) = U_o(x,y) - \frac{1}{2}\left|\bar{z}\,\phi^\circ(z) + z\,\bar{\phi}^\circ(z)\right|$$

$$R(x,y) = \frac{p}{2}(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 - \frac{1}{2}\left|(x-iy)\frac{p}{4}(x+iy) + (x+iy)\frac{p}{4}(x-iy)\right|$$

$$= \frac{p}{4}y^2\cos 2\alpha - \frac{p}{4}x^2\cos 2\alpha - \frac{p}{2}xy\sin 2\alpha$$

$$\frac{\delta R}{\delta x} = -\frac{p}{2}x\cos 2\alpha - \frac{p}{2}y\sin 2\alpha = \frac{\delta Q}{\delta y}$$

$$Q = -\frac{p}{2}xy\cos 2\alpha + \frac{px^2}{4}\sin 2\alpha + f(y)$$

Des deux expressions de Q, nous obtenons par identification :

$$Q = \frac{p}{4}x^2\sin 2\alpha - \frac{p}{2}xy\cos 2\alpha - \frac{p}{4}y^2\sin 2\alpha$$

$$\chi^\circ(z) = \frac{p}{4}y^2\cos 2\alpha - \frac{p}{4}x^2\cos 2\alpha - \frac{p}{2}xy\sin 2\alpha + i\left|\frac{p}{4}x^2\sin 2\alpha - \frac{p}{2}xy\cos 2\alpha - \frac{p}{4}y^2\sin 2\alpha\right|$$

$$\chi^{\circ\prime}(z) = \frac{1}{2}\left|\frac{\delta\chi^\circ(z)}{\delta x} - i\,\frac{\delta\chi^\circ(z)}{\delta y}\right|$$

$$= -\frac{p}{2}x\cos 2\alpha - \frac{p}{2}y\sin 2\alpha + i\left|\frac{p}{2}x\sin 2\alpha - \frac{p}{2}y\cos 2\alpha\right|$$

d'où enfin $\psi^\circ(z) = -\frac{p}{2}z\,e^{-2i\alpha}$ (24.18)

Si cette plaque est percée, le centre du trou coïncidant avec l'origine du système de coordonnées xoy et si les bord du trou sont libres, les fonctions de contraintes $\phi_1(z)$ et $\psi_1(z)$ seront de la forme :

$$\left.\begin{aligned} \phi_1(z) &= \frac{p}{4}\, z + \phi^*(z) \\ \psi_1(z) &= -\frac{p}{2}\, z\, e^{-2i\alpha} + \psi^*(z) \end{aligned}\right\} \quad (24.19)$$

Après la transformation conforme, ces équations deviennent :

$$\left.\begin{aligned} \phi(\zeta) &= \frac{p}{4}\, |\omega(\zeta)| + \phi_o(\zeta) \\ \psi(\zeta) &= -\frac{p}{2}\, e^{-2i\alpha} |\omega(\zeta)| + \psi_o(\zeta) \end{aligned}\right\} \quad (24.20)$$

Les conditions aux limites (24.7) pour l'état de contraintes de base dans la plaque sont les suivantes :

$$\phi^\circ(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\, \overline{\phi^{\circ\prime}(\sigma)} + \overline{\psi_o(\sigma)} = \left|\frac{p}{4}\, \omega(\sigma) + \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\, \frac{p}{4}\, \overline{\omega'(\sigma)} - \frac{p}{2}\, e^{2i\alpha}\, \overline{\omega(\sigma)}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} f_1^\circ + i f_2^\circ &= -\frac{p}{2}\, \left|\omega(\sigma) - e^{2i\alpha}\, \overline{\omega(\sigma)}\right| \\ f_1^\circ - i f_2^\circ &= -\frac{p}{2}\, \left|\overline{\omega(\sigma)} - e^{-2i\alpha}\, \omega(\sigma)\right| \end{aligned}\right\} \quad (24.21)$$

A l'aide des équations (24.21) et (24.7), les fonctions de contraintes $\phi_o(z)$ et $\psi_o(z)$ peuvent être déterminées et en les reportant dans (24.20) nous obtenons les fonctions finales $\phi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$ pour la plaque perforée puis les contraintes.

2,42 - *Cas du trou elliptique*

La transformation conforme faisant passer de l'extérieur de l'ellipse de demi axes a et b à l'intérieur du cercle unité γ peut s'écrire :

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} + m\,\zeta\right)$$

$$\text{avec } R = \frac{a+b}{2} \qquad m = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1-k}{1+k} \qquad k = \frac{b}{a}$$

En reportant la valeur de $\omega(\zeta)$ dans les équations (24.20) et (24.21), les équations (24.7) conduisent à :

$$\left.\begin{aligned} \phi(\zeta) &= \frac{pR}{4}\, \left|\frac{1}{\zeta} + (2e^{2i\alpha} - m)\,\zeta\right| \\ \psi(\zeta) &= -\frac{pR}{4}\, \left|\frac{e^{-2i\alpha}}{\zeta} + \frac{\zeta^3 e^{2i\alpha} + (me^{2i\alpha} - m^2 - 1)\zeta}{m\,\zeta^2 - 1}\right| \end{aligned}\right\} \quad (24.22)$$

α \ θ	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165
0	-1,000	-0,536	0,429	1,309	1,905	2,230	2,333	2,230	1,905	1,309	0,429	-0,536
15	-0,664	0,442	1,560	2,219	2,452	2,385	2,111	1,663	1,054	0,295	-0,506	-1,000
30	0,251	1,676	2,573	2,783	2,549	2,086	1,500	0,837	0,129	-0,550	-1,000	-0,825
45	1,502	2,829	3,207	2,848	2,172	1,413	0,667	-0,028	-0,622	-1,000	-0,919	-0,057
60	2,752	3,599	3,288	2,397	1,419	0,548	-0,166	-0,701	-1,000	-0,935	-0,285	1,098
75	3,669	3,773	2,794	1,553	0,495	-0,278	-0,777	-1,000	-0,902	-0,371	0,731	2,330
90	4,000	3,310	1,858	0,539	-0,354	-0,845	-1,000	-0,845	-0,354	0,539	1,858	3,310

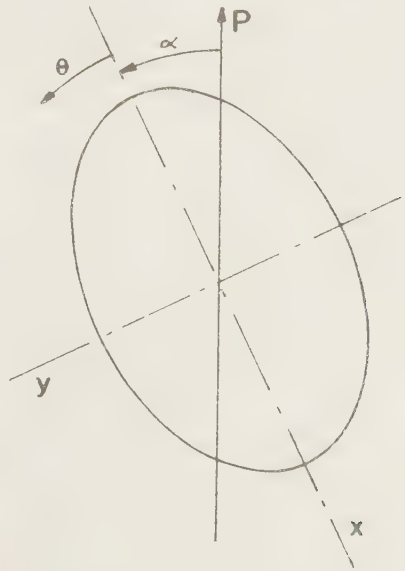


tableau (24-1) Concentrations de contrainte $\frac{\sigma_\theta}{P}$ au bord d'une ellipse dans une plaque en traction ($k = \frac{b}{a} = \frac{2}{3}$) que nous avons calculées à partir de la théorie de SAVIN

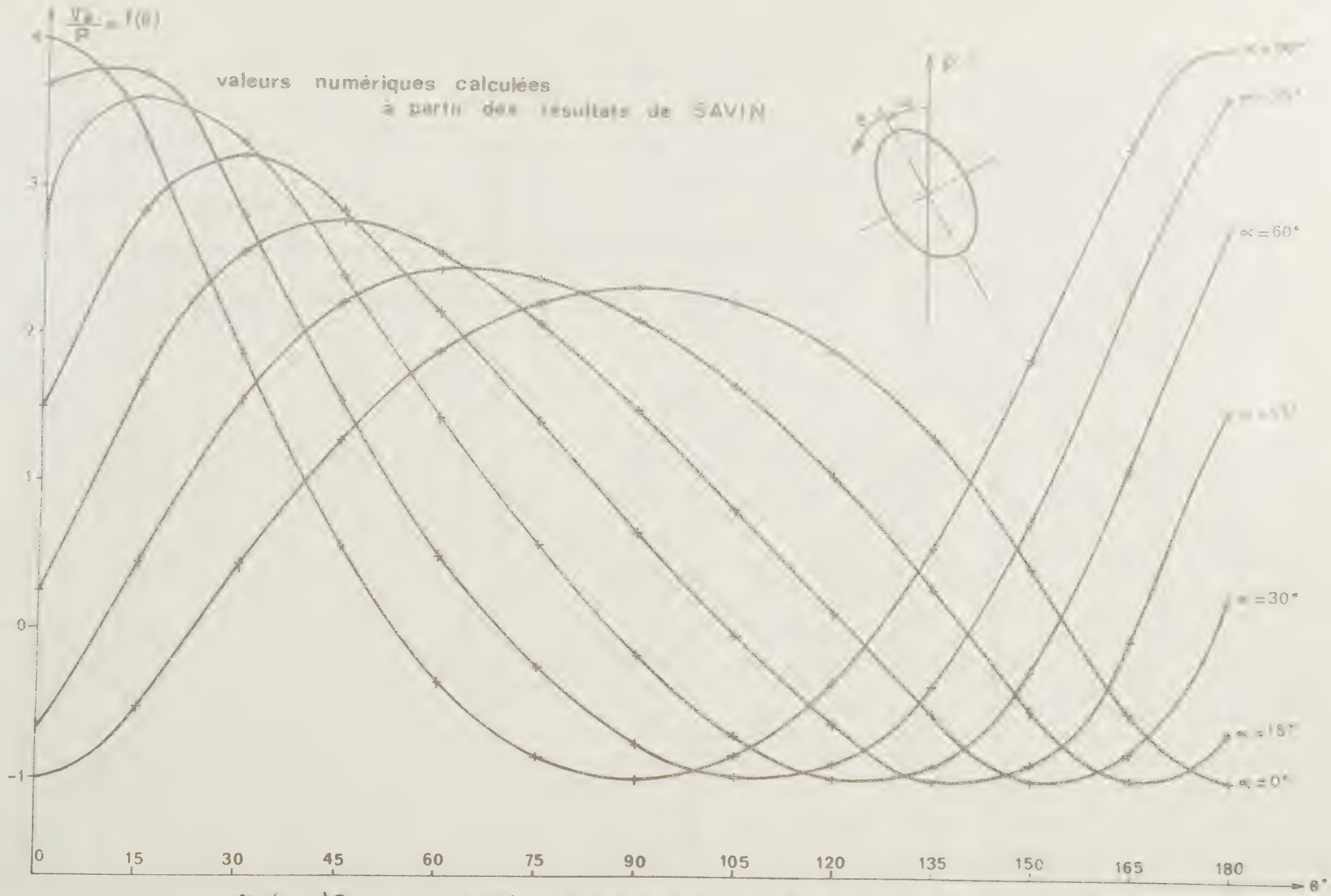


fig.(24_2) Concentrations de contraintes sur le bord de l'ellipse

La contrainte σ_θ sur le bord du trou s'obtient directement à l'aide de la relation (24.9).

$$\sigma_\theta = pR_e \left| \frac{(2e^{2i\alpha} - m)\ \sigma^2 - 1}{m\ \sigma^2 - 1} \right| = p\ \frac{1 - m^2 + 2m \cos 2\alpha - 2 \cos 2\ (\theta+\alpha)}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2}$$

et en remplaçant m par sa valeur :

$$\sigma_\theta = p\ \frac{(1+k)^2 \sin^2 (\theta+\alpha) - \sin^2 \alpha - k^2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \theta + k^2 \cos^2 \theta} \qquad (k = \frac{b}{a})$$

Cette contrainte est maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\theta = 0$; c'est-à-dire aux extrêmités du grand axe de l'ellipse, lorsque celui-ci est perpendiculaire à la direction de la tension dans la plaque. Nous avons alors $\sigma_\theta = p\ (1 + 2\ \frac{a}{b})$

Lorsque a = b, nous retrouvons le facteur de concentration de contraintes de 3 obtenu pour le trou circulaire.

Sur le graphique (24.2), nous avons porté le facteur de concentration de contraintes $\frac{\sigma_\theta}{p}$ en fonction de α et du paramètre de l'ellipse : θ pour une excentricité $k = \frac{b}{a} = \frac{2}{3}$.

Quelle que soit l'inclinaison α, nous obtenons la compression maximum ($\sigma_\theta = - p$) pour $\theta = \pi - \alpha$ et ceci indépendamment de k.

Par rapport à la théorie utilisant les coordonnées curvilignes, celle de Savin-Muskhelishvili présente des avantages. Les coordonnées cartésiennes de l'ellipse sont plus facilement utilisables que son équation en coordonnées elliptiques. Mais surtout la théorie utilisant les coordonnées curvilignes est à reprendre pour chaque type de trou, à condition toutefois que sa géométrie puisse être explicitée en coordonnées curvilignes. La méthode utilisant la transformation conforme est plus souple et offre plus de possibilités. Néanmoins, toutes deux ne peuvent être appliquées qu'à des plaques infinies, chargées symétriquement. De plus, les orifices ne peuvent être renforcés.

2,5 - *ANALYSE DES CONCENTRATIONS DE CONTRAINTES DANS LES PLAQUES INFINIES TROUEES ET RENFORCEES* -

2,51 - *Méthode de calcul*

La théorie suivante, due à W.H. WITTRICK |13||14||15||16|est applicable au calcul des contraintes dans une plaque infinie percée d'un trou muni d'un renforcement tel que l'on puisse considérer que la contrainte normale à l'intérieur du renforcement est constante dans toute sa section. Les autres restrictions sont

- le trou doit avoir au moins un axe de symétrie

- A l'aide d'une transformation conforme de type polynomial, il est possible de passer de la frontière du trou à un cercle unité. L'équation biharmonique pour la fonction de contraintes d'Airy dans le plan complexe s'écrit :

$\frac{\delta^4 U}{\delta z^2 \delta \bar{z}^2} = 0$ Intégrons cette équation en posant $\hat{}U(z)$ intégrale de $U(z)$ par rapport à z : $\frac{\delta^3 U}{\delta z \delta \bar{z}^2} = f_1(\bar{z})$ et $\frac{\delta^2 U}{\delta \bar{z}^2} = z f_1(\bar{z}) + f_2(\bar{z})$

$$\frac{\delta U}{\delta \bar{z}} = z\,\hat{}f_1(\bar{z}) + \hat{}f_2(\bar{z}) + f_3(z)$$

d'où la forme de U : $U = z\,\hat{}\hat{}f_1(\bar{z}) + \hat{}\hat{}f_2(\bar{z}) + \bar{z}\, f_3(z) + f_4(z)$

d'autre part, U doit être une fonction réelle ; ainsi en posant $f_3(z) = \Phi_o(z)$ et $f_4(z) = \chi_o(z)$ nous devons avoir :

$$\hat{}\hat{}f_1(\bar{z}) = \overline{\Phi_o(z)} \quad \text{et} \quad \hat{}\hat{}f_2(\bar{z}) = \overline{\chi_o(z)}$$

En définitive, U peut donc se mettre sous la forme :

$$U = \bar{z}\,\Phi_o(z) + \overline{z\Phi_o(z)} + \chi_o(z) + \overline{\chi_o(z)} \tag{25.1}$$

La résolution de l'équation biharmonique se ramène à la détermination de deux fonctions analytiques : $\Phi_o(z)$ et $\chi_o(z)$. Celles-ci connues, il est possible d'en déduire les contraintes à l'aide des relations :

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\,\frac{\delta^4 U}{\delta z \delta \bar{z}} = 4\,\left|\Phi'_o(z) + \overline{\Phi'_o(z)}\right| \tag{25.2}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 4\,\frac{\delta^2 U}{\delta z^2} = 4\,\left|\bar{z}\Phi''_o(z) + \psi'_o(z)\right| \tag{25.3}$$

où $\psi_o(z) = \chi'_o(z)$

Muskhelishvili | 11 | a montré qu'il était aussi possible d'en déduire les déplacements u et v dans les directions x et y à l'aide de l'équation :

$$G(u+iv) = k\,\Phi_o(z) - z\,\overline{\Phi'_o(z)} - \overline{\psi_o(z)} \tag{25.4}$$

avec $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ module de glissement (ν coefficient de Poisson)

et $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ constant

La dernière relation de base nécessaire aux calculs suivants exprime que la somme des contraintes normales en un point, dans deux directions perpendiculaires, est constante et indépendante de l'orientation :

$$\sigma_s + \sigma_n = \sigma_x + \sigma_y \tag{25.5}$$

$$\text{Soit } z = \Omega(\zeta) = R \sum_{-1}^{N} C_j \, \zeta^{-j}$$

la relation transformant la région à l'extérieur du trou dans le plan z en région extérieure au cercle unité dans le plan ζ.

avec R : constante dimensionnant le trou

C_j : coefficients sans dimension déterminant la forme du trou

Supposons que le trou ait au moins un axe de symétrie : l'axe x

Ainsi $\Omega(\zeta) = \overline{\Omega(\bar{\zeta})}$ et $\Omega(\zeta) = R \sum_{-1}^{N} C_j \, \zeta^{-j}$ entraîne $\Omega(\bar{\zeta}) = R \sum_{-1}^{N} C_j \, \overline{\zeta^{-j}}$

Il en résulte que R et les C_j sont des coefficients réels.

Pratiquement et sans restreindre la généralité du raisonnement, nous pouvons poser $C_{-1} = 1$ et $C_o = 0$ ($C_o = 0$ revient à centrer le trou).
Posons $\Phi_o(z) = \Phi_o|\Omega(\zeta)| = \Phi(\zeta)$ et $\psi_o(z) = \psi_o|\Omega(\zeta)| = \psi(\zeta)$

Les fonctions $\Phi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$ peuvent se développer en séries de la forme :

$$\Phi(\zeta) = R\,(\alpha\zeta + a_o + a_1\,\zeta^{-1} + a_2\,\zeta^{-2} + \ldots) \tag{25.7}$$

$$\psi(\zeta) = R\,(\beta\zeta + b_o + b_1\,\zeta^{-1} + b_2\,\zeta^{-2} + \ldots) \tag{25.8}$$

En effet, $\Phi'(\zeta)$ et $\psi'(\zeta)$ déterminent les contraintes qui doivent être constantes à l'infini donc ces deux fonctions doivent être linéaires quand $\zeta \to \infty$ d'où le développement.

Les constantes α et β peuvent être déterminées en fonction des contraintes à l'infini à l'aide des équations :

$$\sigma_x + \sigma_y = f_1 + f_2 = 4|\Phi'_o(z) + \overline{\Phi'_o(z)}| \quad \text{avec } z \to \infty$$

$z \equiv R\zeta$ quand $z \to \infty$ donc $\Phi'_o(z) = \Phi'(\zeta)\,\frac{d\zeta}{dz} = R\,\alpha \times \frac{1}{R} = \alpha$

$f_1 + f_2 = 4|\alpha + \bar{\alpha}| = 4|2\alpha + \bar{\alpha} - \alpha| = 4|2\alpha + ic|$

$$\text{d'où } \alpha = \frac{1}{8}\,(f_1 + f_2) + ic \qquad c : \text{constante réelle arbitraire} \tag{25.9}$$

d'autre part : $\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 4|\bar{z}\,\Phi''_o(z) + \psi'_o(z)| = f_2 - f_1 + 2iS$

$\Phi''(z) \to 0$ quand $z \to \infty$

$\psi'_o(z) = \psi'(\zeta)\,\frac{d\zeta}{dz} = R\beta \times \frac{1}{R} = \beta$ quand $z \to \infty$

$$\text{d'où } \beta = \frac{1}{4}\,(f_2 - f_1 + 2iS) \tag{25.10}$$

dans ces expressions : $f_1 = \sigma_x$, $f_2 = \sigma_y$ et $S = \tau_{xy}$ quand z tend vers l'infini. A partir de l'équation (25.4) on peut montrer que les valeurs de c, a_o et b_o correspondent à des déplacements d'ensemble que l'on peut éliminer.

MUSKHELISHVILI a montré |11| que si le moment résultant, par rapport à l'origine, des tractions appliquées au bord du trou est nul, la partie réelle de la fonction :

$$z\bar{z}\ \Phi'_o(z) + z\ \psi_o(z) - \chi_o(z) \text{ est définie}$$

D'autre part, les fonctions $\Phi'_o(z)$ et $\psi_o(z)$ sont toutes deux définies donc la partie réelle de $\chi_o(z)$ sera alors définie :

$$\chi_o(z) = \int \psi_o(z)dz = \int \psi(\zeta)\Omega'(\zeta)d\zeta$$

$$= R^2 \int (\beta\zeta + b_o + b_1\ \zeta^{-1} + b_2\ \zeta^{-2} + \ldots)(C_{-1} - C_1\zeta^{-2} - C_2\zeta^{-3}\ \ldots)\ d\zeta$$

Le terme en ζ^{-1} de cette expression, une fois intégré donnera un log ζ qui augmente de $2\pi i$ par tour dans le sens trigonométrique. Il s'ensuit que la partie imaginaire de $(b_1 C_{-1} - \beta C_1)$ doit être nulle. Or tous les coefficients C_j sont réels et d'après l'équation (25.10), la partie imaginaire de β est $\frac{1}{2}$ iS donc la partie imaginaire de b_1 sera $\mathcal{J}(b_1) = \frac{C_1}{2C_{-1}}$ iS (25.11)

Etude des conditions aux limites :

Considérons l'équilibre d'un élément ds de la frontière du renforcement avec un élément de la plaque jointive (Fig. 25.1).

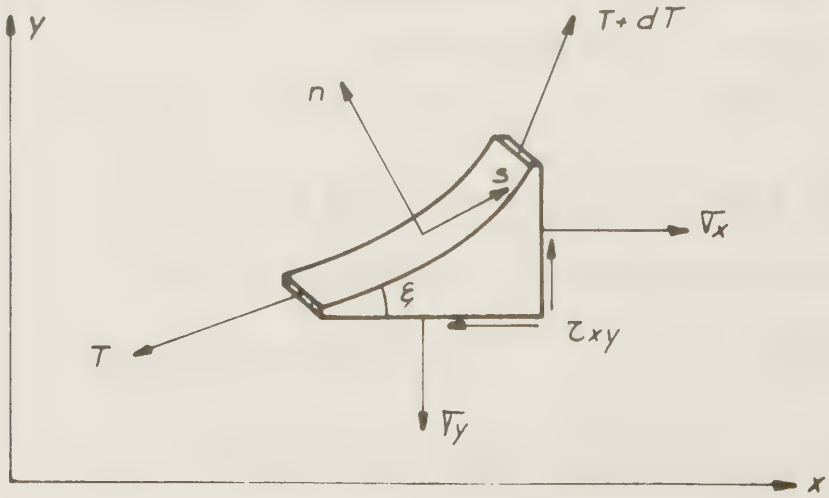


Fig. 25.1 - Elément de renforcement et plaque jointive

On supposera que la force de cisaillement dans le renforcement peut être négligée devant la tension T. En appelant :

t : l'épaisseur de la plaque

ξ : la pente de la frontière

l'équilibre de l'élément dans la direction y se traduit par :

$$d(T \sin \xi) = t(\sigma_y dx - \tau_{xy} dy) = t(\frac{\delta^2 U}{\delta x^2} dx + \frac{\delta^2 U}{\delta x \delta y} dy) = td\ (\frac{\delta U}{\delta x})$$

De même pour l'équilibre dans la direction x :

$$d(T \cos \xi) = - t\ (\frac{\delta U}{\delta y})$$

La combinaison de ces deux équations donne :

$$d(Te^{-i\xi}) = - itd\ (\frac{\delta U}{\delta x} - i\ \frac{\delta U}{\delta y}) = - 2\ itd\ (\frac{\delta U}{\delta z})$$

et d'après l'équation (25.1) : $\frac{\delta U}{\delta x} = \bar{z}\ \Phi'(z) + \overline{\Phi_o(z)} + \chi'_o(z)$

En remplaçant dans l'équation précédente et après intégration :

$$\frac{T}{2t} = - ie^{i\xi} \left| \overline{\Phi_o(z)} + \bar{z}\ \Phi'_o(z) + \psi_o(z) \right| \qquad (25.12)$$

la constante d'intégration ayant été incluse dans $\Phi_o(z)$

Comme T est essentiellement réel, la première condition aux limites exprime que le second membre de l'équation (25.12) est réel. Cela permettra de calculer $\psi_o(z)$ en fonction de $\Phi_o(z)$.

La seconde condition aux limites provient de l'égalité des déformations du renforcement et de la plaque à laquelle il est lié.

$$\frac{T}{A} = \sigma_s - \nu\sigma_n \qquad (25.13)$$

A est l'aire de la section du renforcement, les directions n et s sont portées sur la Fig. 25.1.

Cette équation de WITTRICK traduit des hypothèses discutables. En plus du fait que la traction tangentielle T est supposée constante sur la section A du bossage, WITTRICK néglige l'allongement du bossage dû à l'effort radial qui s'exerce à la liaison entre le bossage et la plaque.

Considérons maintenant l'équilibre d'un élément de renforcement seul représenté sur la Fig. 25.2.

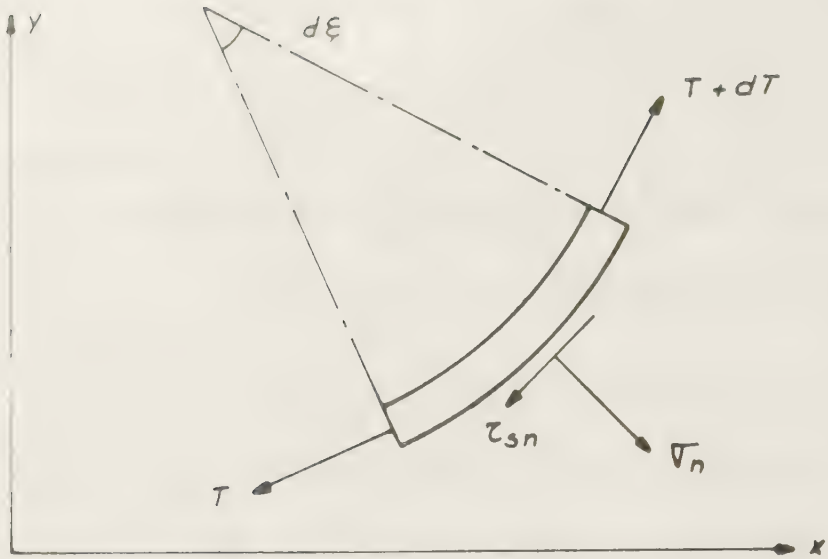


Fig. 25.2 - Elément de renforcement

Selon les directions n et s :

$$\sigma_n t r d\xi = 2T \sin \frac{d\zeta}{2} \longrightarrow \sigma_n = \frac{T}{rt} \tag{25.14}$$

$$\tau_{sn} t ds = dT \longrightarrow \tau_{sn} = \frac{1}{t}\frac{dT}{ds} \tag{25.15}$$

(r : rayon de courbure local de la frontière)

La combinaison des équations (25.13) et (25.14) donne la seconde condition aux limites :

$$T \left|\frac{1}{A} + \frac{1+\nu}{rt}\right| = \sigma_s + \sigma_n \tag{25.16}$$

équation dans laquelle T est donné par l'équation (25.12) et $(\sigma_s + \sigma_n)$ par les équations (25.2) et (25.5).

Géométrie du trou :

Soient x et y les coordonnées d'un point à la frontière du trou :

$$\left.\begin{aligned} x &= XR \\ y &= YR \end{aligned}\right\} \text{X et Y quantités sans dimension}$$

sur le cercle unité : $\zeta = e^{i\theta} = \sigma$ (25.17)

En séparant parties imaginaire et réelle de l'équation (25.6) :

$$X = \sum_{-1}^{N} Cj \cos j\theta \qquad Y = -\sum_{-1}^{N} Cj \sin j\theta \tag{25.18}$$

$$\overset{\circ}{X} = -\sum_{-1}^{N} j\, Cj \sin j\theta \qquad \overset{\circ}{Y} = -\sum_{-1}^{N} j\, Cj \cos j\theta \tag{25.19}$$

$$\overset{\circ\circ}{X} = -\sum_{-1}^{N} j^2\, Cj \cos j\theta \qquad \overset{\circ\circ}{Y} = \sum_{-1}^{N} j^2\, Cj \sin j\theta \tag{25.20}$$

expressions dans lesquelles $^\circ$ représente une différenciation par rapport à θ. La pente de la frontière (ξ) est donnée par :

$$e^{i\xi} = \left|\frac{dz}{dz}\right| = \frac{\Omega'(\sigma)d\sigma}{|\Omega'(\sigma)||d\sigma|} \qquad \text{avec} \begin{cases} d\sigma = i\sigma d\theta \\ d(\sigma) = d\theta \end{cases}$$

$$\text{d'où} \quad -e^{i\xi} = \frac{\sigma\Omega'(\sigma)}{|\Omega'(\sigma)|} \tag{25.21}$$

Par ailleurs $\Omega'(\sigma) = \frac{d\theta}{d\sigma}\,\frac{d}{d\theta}\,|\Omega(\sigma)| = \frac{R(\overset{\circ}{X}+i\overset{\circ}{Y})}{i\sigma}$

$$\text{en posant } P = \overset{\circ}{X}{}^2 + \overset{\circ}{Y}{}^2 \tag{25.22}$$

$$\text{nous obtenons } |\Omega'(\sigma)| = RP^{1/2} \tag{25.23}$$

et le rayon de courbure r de la frontière est donné par :

$$\frac{R}{r} = P^{-\frac{3}{2}}\,(\overset{\circ}{X}\,\overset{\circ\circ}{Y} - \overset{\circ}{Y}\,\overset{\circ\circ}{X}) \tag{25.24}$$

Cas de tensions à l'infini :

Considérons le cas où le système de contraintes à l'infini est constitué des tensions f_1 et f_2 dans les directions x et y sans cisaillement ($S = 0$). Les équations (25.7) et (25.8) se mettent alors sous la forme :

$$\Phi_o(z) = \Phi(\zeta) = R\left|\frac{1}{8}(f_1+f_2)\zeta + a_o + a_1\,\zeta^{-1} + a_2\,\zeta^{-2} + \ldots\right| \tag{25.25}$$

$$\psi_o(z) = \psi(\zeta) = R\left|\frac{1}{4}(f_1-f_2)\zeta + b_1\,\zeta^{-1} + b_2\,\zeta^{-2} + \ldots\right| \tag{25.26}$$

Nous avons éliminé b_o qui correspond seulement à un déplacement d'ensemble ; par contre nous devons retenir a_o qui en plus contient une constante d'intégration due au mode d'obtention de l'équation (25.12). En raison de la symétrie du trou et du chargement , par rapport à l'axe x, si les déplacements au point z_o sont u_o et v_o, au point image $\bar{z}_o$, les déplacements seront u_o et $-v_o$. En utilisant l'équation (25.4) il en découle :

$$\Phi_o(z) = \bar{\Phi}_o(z) \qquad \text{et} \qquad \psi_o(z) = \bar{\psi}_o(z)$$

Dans les équations (25.25) et (25.26) tous les coefficients a_n et b_n sont donc réels. Comme $S = 0$ et b_1 est réel, l'équation (25.11) est automatiquement satisfaite.

$$\text{Maintenant, } \Phi'_o(z) = \frac{d}{dz}\,\Phi_o(z) = \frac{d}{d\zeta}\,\Phi(\zeta)\,\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\Phi'(\zeta)}{\Omega'(\zeta)}$$

A l'aide des équations (25.21) et (25.23) l'équation (25.12) donnant la tension dans le renforcement devient :

$$\frac{TRP^{1/2}}{2t} = \sigma\Omega'(\sigma)\left|\overline{\Phi'(\sigma)} + \psi(\sigma)\right| + \sigma\overline{\Omega(\sigma)}\ \Phi'(\sigma) \tag{25.27}$$

T est réel donc le second membre de cette équation doit l'être aussi.
En utilisant le fait que $\bar{\sigma} = \frac{1}{\sigma}$ on obtient l'équation suivante aux limites :

$$\sigma\Omega'(\sigma)\ \left|\Phi\ (\tfrac{1}{\sigma}) + \psi(\sigma)\right| - \frac{1}{\sigma}\ \Omega'(\tfrac{1}{\sigma})\left|\Phi(\sigma) + \psi(\tfrac{1}{\sigma})\right| + \sigma\Omega(\tfrac{1}{\sigma})\Phi'(\sigma) - \frac{1}{\sigma}\ \Omega(\sigma)\Phi'(\tfrac{1}{\sigma}) = 0 \tag{25.28}$$

Multiplions cette équation par $\frac{d\sigma}{2\pi i(\sigma-\zeta)}$ où $|\zeta| \geq 1$ et intégrons sur le cercle unité.
En utilisant les équations (25.6) (25.25) et (25.26) et les propriétés des intégrales de Cauchy, nous obtenons :

$$\zeta\Omega'(\zeta)\ \psi(\zeta) = \frac{1}{8}\ (f_1+f_2)\ \left|\frac{1}{\zeta}\ \Omega(\zeta) + \zeta\Omega(\tfrac{1}{\zeta}) - \Omega'(\zeta) - \Omega'(\tfrac{1}{\zeta})\right| + \frac{1}{\zeta}\ \Omega'(\tfrac{1}{\zeta})\Phi(\zeta) -$$

$$- \zeta\Omega(\tfrac{1}{\zeta})\Phi'(\zeta) + b_1R^2 + R^2 \sum_{n=o}^{N-1} \left|a_n \sum_{j=n+1}^{N} (j-n)Cj(\zeta^{j-n} + \zeta^{n-j})\right| \tag{25.29}$$

La fonction $\psi(\zeta)$ est alors complètement déterminée en fonction de $\Phi(\zeta)$, à part le coefficient b_1 qui reste inconnu. La substitution des équations (25.6), (25.25) et (25.29) dans l'équation (25.27) donne maintenant l'expression suivante pour T :

$$\frac{TP^{1/2}}{4Rt} = \frac{1}{8}\ (f_1+f_2) \sum_{-1}^{N} Cj \cos\ (j+1)\theta + \frac{1}{8}\ (f_2-f_1)(2C_{-1} \cos 2\theta - C_1) + \frac{1}{2}\ b_1$$

$$- \sum_{n=o}^{\infty} \left|a_n \sum_{j=1}^{N} j\ Cj \cos\ (n-j)\theta\right| + \sum_{n=o}^{N-1} \left|a_n \sum_{j=n+1}^{N} (j-n)Cj \cos(j-n)\theta\right| \tag{25.30}$$

La somme des contraintes normales à la frontière du trou est donnée par :

$$\sigma_s + \sigma_n = 4\ \left|\Phi'_o(z) + \overline{\Phi'_o(z)}\right|$$

$$= 4\ \left|\frac{\Phi'(\sigma)}{\Omega'(\sigma)} + \frac{\overline{\Phi'(\sigma)}}{\overline{\Omega'(\sigma)}}\right|$$

Ainsi, en notant que $\Omega'(\sigma)\ \ \overline{\Omega'(\sigma)} = |\Omega'(\sigma)|^2$ et en utilisant l'équation (25.23) nous obtenons :

$$\frac{PR^2}{4}\ (\sigma_s + \sigma_n) = \overline{\Omega'(\sigma)}\ \Phi'(\sigma) + \Omega'(\sigma)\ \overline{\Phi'(\sigma)}$$

et à partir des équations (25.6) et (25.25) :

$$\frac{P}{8}(\sigma_s+\sigma_n) = - \frac{1}{8}\ (f_1+f_2) \sum_{-1}^{N} j\ Cj \cos\ (j+1)\theta + \sum_{n=1}^{\infty} na_n \sum_{j=-1}^{N} j\ Cj \cos(n-j)\theta\Big| \tag{25.31}$$

Maintenant, la seconde condition aux limites sur la frontière du trou (équation 25.16) concernant les déformations peut se mettre sous la forme :

$$\frac{TP^{1/2}}{4RT} = Q\,\frac{P}{8}\,(\sigma_s + \sigma_n) \tag{25.32}$$

$$\text{en posant } Q = 2P^{-1/2}\left|\frac{Rt}{A} + (1+\nu)\,\frac{R}{r}\right|^{-1} \tag{25.33}$$

La substitution des équations (25.30) et (25.31) dans l'équation (25.32) donne alors :

$$\frac{1}{2}\,b_1 - \sum_{n=o}^{\infty}\left|a_n(1+nQ)\sum_{j=-1}^{N} jCj\cos(n-j)\theta\right| + \sum_{n=o}^{N-1}\left|a_n\sum_{j=n+1}^{N}(j-n)Cj\cos(j-n)\theta\right| +$$

$$+\frac{1}{8}\,(f_1+f_2)\sum_{-1}^{N} Cj(1+jQ)\cos(j+1)\theta + \frac{1}{8}\,(f_2-f_1)(2C_{-1}\cos 2\theta - C_1) = 0 \tag{25.34}$$

L'équation (25.34) permet alors le calcul des inconnues b_1 et a_n. Il faut cependant noter qu'en général, P, r et Q sont des fonctions de θ, ce qui complique la comparaison des coefficients des termes en cosinus dans l'équation (25.34). Théoriquement, Q peut être développé en série de cosinus lui-même et le produit de cosinus résultant de l'équation (25.34) peut être exprimé en fonction d'une somme de cosinus. Après comparaison des coefficients, un nombre infini d'équations infinies en résulte pour calculer les inconnues. Cependant, même dans le cas d'un simple trou elliptique, ce procédé est trop long et trop compliqué pour avoir des possibilités pratiques.

Une approche plus simple et plus directe du problème est de retenir seulement un nombre fini, soit m, de coefficients a_n et de satisfaire l'équation (25.34) en (m+1) points dans l'intervalle $0 \leq \theta \leq \pi$, par exemple à $\theta = 0$, $\frac{\pi}{m}$, $\frac{2\pi}{m}$ ... π. De cette façon, on obtient suffisamment d'équations simultanées pour déterminer les valeurs des coefficients b_1 et a_n. Ce procédé se prête à l'utilisation d'un ordinatuer et a été utilisé avec succès pour obtenir les contraintes autour de trous elliptiques renforcés. Si l'on présume qu'en certains endroits de la frontière de brusques variations de contraintes peuvent apparaître, tel que le cas d'un trou carré avec des angles légèrement arrondis (les arrondis étant imposés par la transformation conforme), le procédé peut être modifié en satisfaisant l'équation (25.34) en de petits intervalles de θ dans cette région. La convergence des a_n vers zéro quand n augmente permet de vérifier si le nombre de coefficients a_n retenu est suffisant pour la précision requise. De même, si un doute subsiste sur la grandeur des intervalles θ choisis, une vérification à postériori peut être faite en contrôlant dans quelle mesure l'équation (25.34) est satisfaite aux points milieux des intervalles.

Il existe certains cas spéciaux dans lesquels Q est constant. Par exemple si le trou n'est pas renforcé alors A = Q = 0. Si le trou est circulaire avec un renforcement constant, dans ce cas P, r, A et donc Q sont des constantes. Ainsi on peut montrer que tout trou elliptique dessiné pour être neutre pour une valeur particulière du rapport Δ de f_1/f_2 rejoint ce cas et la distribution de l'aire de renforcement est telle que les variations de P, r et A avec θ s'annulent entre elles et laissent Q constant et égal à $\frac{2}{(\lambda + \lambda^{-1})}$. Si pour toute raison Q reste constant, les inconnues peuvent être déterminées directement à partir de l'équation (25.34) en comparant les coefficients des divers termes en cosinus. Dans ce cas, on voit que $a_n = 0$ si n est plus grand que N de telle façon que les séries pour $\Phi(\zeta)$ se limitent à un nombre fini de termes.

Une fois les coefficients a_n déterminés, la somme des contraintes principales $(\sigma_s + \sigma_n)$ dans la plaque, à la frontière du trou peut être calculée à partir de l'équation (25.31). La tension T dans le renforcement découle de l'équation (25.32) :

$$\frac{T}{Rt} = \frac{1}{2} \; Q \, P^{1/2} \, (\sigma_s + \sigma_n) \tag{25.35}$$

L'équation (25.14) donne alors la contrainte σ_n ; connaissant ceci et $(\sigma_n + \sigma_s)$ on peut en déduire σ_s. Finalement la contrainte τ_{sn} de cisaillement sur la frontière est fournie par l'équation (25.15). En effet :

$$ds = |dz| = |\Omega'(\sigma) \, d\sigma| = R \, P^{1/2} d\theta$$

$$\text{donc } \tau_{sn} = \frac{1}{RtP^{1/2}} \frac{dT}{d\theta} = 4P^{-1/2} \frac{d}{d\theta} \left| \frac{TP^{1/2}}{4Rt} P^{-1/2} \right|$$

$$\tau_{sn} = \frac{4}{P} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{TP^{1/2}}{4Rt}\right) - \frac{2}{P^2} \frac{TP^{1/2}}{4RT} \frac{dP}{d\theta}$$

A l'aide de l'équation (25.32) nous obtenons alors :

$$\tau_{sn} = \frac{4}{P} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{TP^{1/2}}{4Rt}\right) - \frac{Q}{4P} (\sigma_s + \sigma_n) \frac{dP}{d\theta} \tag{25.36}$$

et à partir de l'équation (25.30)

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{TP^{1/2}}{4Rt}\right) = - \frac{1}{8}(f_1+f_2) \sum_{-1}^{N} (j+1) Cj \sin (j+1) \theta - \frac{1}{2} (f_2-f_1) \, C_{-1} \sin 2\theta +$$

$$+ \sum_{n=o}^{\infty} \left| a_n \sum_{j=-1}^{N} j(n-j) Cj \sin (n-j)\theta \right| - \sum_{n=o}^{n-1} \left| a_n \sum_{j=n+1}^{N} (j-n)^2 Cj \sin (j-n)\theta \right| \tag{25.37}$$

puis l'équation (25.22) donne :

$$\frac{dP}{d\theta} = 2 \, (\overset{\circ}{X} \overset{\infty}{X} + \overset{\circ}{Y} \overset{\infty}{Y}) \tag{25.38}$$

Ces équations (25.36), (25.37) et (25.38) permettent de calculer τ_{sn}

2,52 - *Transformation des équations dans le cas du trou elliptique*

La transformation conforme faisant passer de la région extérieure à l'ellipse à la région extérieure au cercle unité dans le plan ζ est de la forme :

$$z = \Omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) \tag{25.39}$$

dans laquelle : $a = R\,(1 + m)$ $\qquad b = R\,(1 - m)$

ou $R = \frac{1}{2}(a + b)$ $\qquad m = \frac{a - b}{a + b}$

Sur le cercle γ unité : $\zeta = e^{i\theta} = \sigma$

Sur la frontière de l'ellipse $dz = |dz|\, e^{i\zeta}$

d'où $e^{i\xi} = \frac{dz}{|dz|} = \frac{\Omega'(\sigma)}{|\Omega'(\sigma)|} = \frac{d\sigma}{|d\sigma|}$

de même : $d\sigma = ie^{i\theta}d\theta = i\sigma d\theta$ et $|d\sigma| = d\theta$

ainsi : $$-ie^{i\xi} = \frac{\sigma\Omega'(\sigma)}{|\Omega'(\sigma)|} \tag{25.40}$$

$$|\Omega'(\sigma)| = |\Omega(\sigma)\ \overline{\Omega'(\sigma)}|^{1/2} = R\left|\left(1 - \frac{m}{\sigma^2}\right)(1 - m\sigma^2)\right|^{1/2} = RP^{1/2} \tag{25.41}$$

avec $$P = 1 + m^2 - 2m\cos\theta \tag{25.42}$$

d'où $$-ie^{i\xi} = P^{-\frac{1}{2}}\left(\sigma - \frac{m}{\sigma}\right) \tag{25.43}$$

$$ie^{-i\xi} = P^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sigma} - m\sigma\right) \tag{25.44}$$

En divisant les deux équations (25.43) et (25.44) membre à membre :

$$e^{2i\xi} = -(\sigma^2 - m)/(1 - m\sigma^2) \tag{25.45}$$

En dérivant l'équation (25.45) :

$$2ie^{2i\xi}\frac{d\xi}{d\theta} = \frac{-2\,i\sigma^2(1-m^2)}{(1-m\,\sigma^2)^2}$$

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \frac{1 - m^2}{(1-m\sigma^2)\left(1-\frac{m}{\sigma^2}\right)} = (1 - m^2)\,P^{-1} \tag{25.46}$$

D'autre part : $ds = |dz| = |\Omega'(\sigma)|d\theta$

$$\frac{ds}{d\theta} = RP^{1/2} \tag{25.47}$$

. partir des équations (25.46) et (25.47), nous obtenons le rayon de courbure de la frontière :

$$r = \frac{ds}{d\zeta} = \frac{RP^{3/2}}{(1-m^2)} \tag{25.48}$$

En reportant cette valeur de r dans les équations (25.14) et (25.13) nous obtenons les contraintes :

$$\sigma_n = \frac{(1-m^2)T}{Rt\ P^{3/2}} \tag{25.49}$$

$$\sigma_s = \sigma_n(\nu + \frac{HP^{3/2}}{1-m^2}) \tag{25.50}$$

où H est un paramètre sans dimension, défini par la relation :

$$H = \frac{Rt}{A} = (a + b)\ \frac{t}{2A} \tag{25.51}$$

Cas de la plaque percée d'un trou elliptique renforcé, en traction à l'infini:

Soient les contraintes à l'ifini $\sigma_{x\infty} = f_1$ $\sigma_{y\infty} = f_2$ $\tau_{xy\infty} = 0$

L'aire A du renforcement peut varier mais supposons qu'elle reste symétrique par rapport aux axes de l'ellipse. Dans ce cas, les fonctions potentielles seront de la forme :

$$\left.\begin{aligned} \Phi_o(z) &= \alpha z + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_3 z^{-3} + \dots \\ \psi_o(z) &= \beta z + \beta_1 z^{-1} + \beta_3 z^{-3} + \dots \end{aligned}\right\} \tag{25.52}$$

où tous les ceofficients sont réels.

En reportant ces valeurs dans les équations (25.2) et (25.3) puis en faisant tendre z vers l'infini :

$$\alpha = \frac{1}{8}(f_1 + f_2) \qquad \beta = -\frac{1}{4}(f_1 - f_2) \tag{25.53}$$

En traduisant les équations (25.52) dans le plan ζ à l'aide de la fonction définie par l'équation (25.39) et comme α_n, β_n, R et m sont tous réels nous obtenons :

$$\left.\begin{aligned} \Phi_o(z) &= \Phi_o\ |\Omega(\zeta)| = \Phi_1(\zeta) = R\ |\frac{1}{8}(f_1 + f_2)\zeta + \Phi(\zeta)| \\ \psi_o(z) &= \psi_o\ |\Omega(\zeta)| = \psi_1(\zeta) = R\ |-\frac{1}{4}(f_1 - f_2)\zeta + \psi(\zeta)| \end{aligned}\right\} \tag{25.54}$$

Dans ces expressions, $\Phi_o(\zeta)$ et $\psi_o(\zeta)$ sont des fonctions qui s'annulent à l'infini et par conséquent qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\zeta) &= a_1\,\zeta^{-1} + a_3\,\zeta^{-3} + a_5\,\zeta^{-5} + \dots\\ \psi(\zeta) &= b_1\,\zeta^{-1} + b_3\,\zeta^{-3} + b_5\,\zeta^{-5} + \dots\end{aligned}\right\} \quad (25.55)$$

Tous les coefficients a_n et b_n étant réels.

D'après l'équation (25.42) $\Phi'_o(z) = \frac{d\zeta}{dz}\ \Phi'_1(\zeta) = \frac{\Phi'_1(\zeta)}{\Omega'(\zeta)}$ (25.56)

Le premier membre de l'équation (25.12) est réel, donc le second doit être égal à son conjugué.

$$e^{i\xi}\left|\overline{\Phi_o(z)} + \bar{z}\,\Phi'_o(z) + \psi_o(z)\right| = -e^{-i\xi}\left|\Phi_o(z) + z\overline{\Phi'_o(z)} + \overline{\psi_o(z)}\right| \quad (25.57)$$

En utilisant les équations (25.39), (25.40), (25.54) et (25.56) et en remplaçant ζ par σ dans cette équation, nous obtenons la condition aux limites :

$$\sigma\overline{\Omega(\sigma)}\Phi'_1(\sigma) + \sigma\Omega'(\sigma)\left|\overline{\Phi_1(\sigma)} + \psi_1(\sigma)\right| = \frac{1}{\sigma}\,\Omega(\sigma)\ \overline{\Phi'_1(\sigma)} + \frac{1}{\sigma}\,\overline{\Omega'(\sigma)}\left|\Phi_1(\sigma) + \overline{\psi_1(\sigma)}\right|$$

ou encore :

$$\left|mb_1 - b_3 + 2a_1 + 2ma_3 + \frac{1}{4}\,m(f_1+f_2) - \frac{1}{4}\,(f_1-f_2)\right|\left(\sigma^2 - \frac{1}{\sigma^2}\right) +$$

$$+\left|mb_3 - b_5 + 4a_3 + 4ma_5\right|\left(\sigma_4 - \frac{1}{\sigma_4}\right) + \left|mb_5 - b_7 + 6a_5 + 6ma_7\right|\left(\sigma^6 - \frac{1}{\sigma^6}\right) + \dots = 0$$

Cette relation devant être valable quel que soit σ , chaque terme entre crochets doit être nul :

$$b_3 = mb_1 + 2a_1 + 2ma_3 + \frac{1}{4}\,m\,(f_1 + f_2) - \frac{1}{4}\,(f_1 - f_2)$$

$$b_5 = mb_3 + 4a_3 + 4ma_5$$

$$b_7 = mb_5 + 6a_5 + 6ma_7 \quad \dots$$

D'où en reportant dans l'équation (25.55)

$$\psi(\zeta) = b_1\zeta^{-1} + m\,\zeta^{-2}(b_1\zeta^{-1} + b_3\zeta^{-3} + b^5\,\zeta^{-5} + \dots) + (2a_1\zeta^{-3} + 4a_3\zeta^{-5} + 6a_5\zeta^{-7} + \dots)$$

$$+ m(2a_3\zeta^{-3} + 4a_5\zeta^{-5} + 6a_7\zeta^{-7} + \dots) + \frac{1}{\zeta^3}\left|\frac{m}{4}\,(f_1 + f_2) - \frac{1}{4}\,(f_1 - f_2)\right|$$

Dans cette équation, les séries peuvent être exprimées en fonction de $\psi(\zeta)$, $\Phi(\zeta)$ et $\Phi'(\zeta)$ d'où l'équation suivante :

$$\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)\psi(\zeta) = \frac{d}{d\zeta}\left|\left(\frac{1}{\zeta} + m\zeta\right)\Phi(\zeta)\right| + \frac{b_1}{\zeta} + \frac{1}{4\zeta^3}\left|m(f_1 + f_2) - (f_1 - f_2)\right| \quad (25.58)$$

Sauf b_1 qui reste inconnu, nous avons alors déterminé $\psi(\zeta)$ en fonction de $\Phi(\zeta)$ En reportant les équations (25.39), (25.44), (25.55) et (25.58) dans l'équation aux limites (25.12) .

$$T = 4Rt\, P^{-\frac{1}{2}} \{\frac{1}{8}(f_1 + f_2)(1 + m\cos 2\theta) + \frac{1}{8}(f_1 - f_2)(m - 2\cos 2\theta) + \frac{1}{2} b_1 + \sum_{1,3,5}^{\infty} a_n \,|\cos(n+1)\theta - m\cos(n-1)\theta|\} \tag{25.59}$$

Nous pouvons alors en déduire l'expression des contraintes :

$$\sigma_n = 4(1-m^2)P^{-2} \{\frac{1}{8}(f_1 + f_2)(1 + m\cos 2\theta) + \frac{1}{8}(f_1 - f_2)(m - 2\cos 2\theta) + \frac{1}{2} b_1 + \sum_{1,3,5\ldots}^{\infty} a_n \,|\cos(n+1)\theta - m\cos(n-1)\theta|\} \tag{25.60}$$

$$\sigma_s = -\sigma_n + 8P^{-1} \{\frac{1}{8}(f_1 + f_2)(1 - m\cos 2\theta) - \sum_{1,3,5\ldots}^{\infty} na_n \,|\cos(n+1)\theta - m\cos(n-1)\theta|\} \tag{25.61}$$

$$\tau_{sn} = -4P^{-2} \{\frac{1}{4}(f_1 + f_2)\,|(2m + m^3)\sin 2\theta - \frac{1}{2} m^2 \sin 4\theta| - \frac{1}{4}(f_1 - f_2)\,|(2+m^2)\sin 2\theta - m\sin 4\theta| + mb_1 \sin 2\theta + \sum_{1,3,5\ldots}^{\infty} a_n (1 - m^2 + nP)\,|\sin(n+1)\theta - m\sin(n-1)\theta|\} \tag{25.62}$$

Les coefficients b_1 et a_n sont toujours inconnus mais nous devons satisfaire la seconde équation aux limites et en substituant les équations (25.60) et (25.61) dans l'équation (25.13) :

$$\frac{1}{2} b_1 + \sum_{1,3,5\ldots}^{\infty} (1+nQ)\,|\cos(n+1)\theta - m\cos(n-1)\theta|\, a_n = \frac{1}{8}(f_1 + f_2)(1 - m\cos 2\theta)\, Q - (1 + m\cos 2\theta) + \frac{1}{8}(f_1 - f_2)(2\cos 2\theta - m) \tag{25.63}$$

avec $Q = 2P\,|HP^{\frac{3}{2}} + (1 - m^2)(1 + \nu)|^{-1}$

La section A du renforcement et par conséquent H peuvent être des fonctions de θ . De plus, P défini par l'équation (25.42) varie aussi avec θ . Ainsi, en général Q étant fonction de θ , il est impossible de déterminer les inconnues de l'équation (25.63) en identifiant les coefficients. Les résultats numériques du ta-

A/Rt		0							1/3						
θ		0	15	30	45	60	75	90	0	15	30	45	60	75	90
$f_1 = 1$, $f_2 = 0$	σ_n	0	0	0	0	0	0	0	-0,078	0,008	0,159	0,254	0,291	0,300	0,301
	σ_s	-1,000	-0,571	0,366	1,276	1,927	2,296	2,414	-0,162	0,019	0,442	0,905	1,280	1,516	1,595
	τ_{sn}	0	0	0	0	0	0	0	0	0,429	0,589	0,517	0,353	0,175	0
$f_1 = 0$, $f_2 = 1$	σ_n	0	0	0	0	0	0	0	0,998	0,802	0,434	0,157	0,009	-0,056	-0,074
	σ_s	3,828	3,222	1,897	0,610	-0,310	-0,833	-1,000	2,087	1,822	1,211	0,558	0,038	-0,284	-0,392
	τ_{sn}	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,562	-0,768	-0,671	-0,457	-0,225	0

A/Rt		2/3							1						
θ		0	15	30	45	60	75	90	0	15	30	45	60	75	90
$f_1 = 1$, $f_2 = 0$	σ_n	0,002	0,102	0,277	0,388	0,430	0,439	0,440	0,071	0,175	0,358	0,472	0,514	0,522	0,522
	σ_s	0,002	0,133	0,433	0,756	1,018	1,184	1,240	0,065	0,172	0,412	0,665	0,868	0,996	1,039
	τ_{sn}	0	0,549	0,771	0,697	0,490	0,247	0	0	0,610	0,864	0,791	0,562	0,286	0
$f_1 = 0$, $f_2 = 1$	σ_n	1,329	1,080	0,605	0,239	0,039	-0,052	-0,077	1,501	1,226	0,699	0,289	0,061	-0,043	-0,072
	σ_s	1,611	1,405	0,944	0,466	0,091	-0,140	-0,218	1,380	1,200	0,805	0,407	0,104	-0,081	-0,143
	τ_{sn}	0	-0,691	-0,964	-0,866	-0,606	-0,304	0	0	-0,748	-1,053	-0,957	-0,677	-0,343	0

tableau (25_3) Contraintes à la limite du renforcement d'un trou elliptique d'après Wittrick [15] ; $K = \frac{a}{b} = \sqrt{2}$; $\nu = 1/3$

bleau (25.3) ont été obtenus en retenant les coefficients b_1, a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, a_{11} dont les valeurs ont été déterminées en satisfaisant l'équation (25.63) en sept points sur un quart de la frontière : $\theta = 0°$, 15°, 30°, 45°, 60°, 75° et 90°. Dans les différents cas étudiés, le rapport a_{11}/a_1 était toujours inférieur à 2.10^{-5}. Pour ν, la valeur $\frac{1}{3}$ a été retenue. Dans le tableau (25.3), les résultats obtenus pour A/Rt = 0, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de renforcement, recoupent exactement ceux obtenus par la méthode de G.N. Savin.

La méthode ainsi exposée, quoique laborieuse dans son application, a le mérite d'être applicable à presque toutes les formes de trous, pourvu que ceux-ci présentent un axe de symétrie et que l'on connaisse une transformation conforme les ramenant au cercle unité. La méthode est aussi limitée par ses hypothèses faites en cours de démonstration : la tension est uniforme, le cisaillement est négligeable dans le renforcement mais surtout l'effort normal exercé par la plaque sur le renforcement est négligeable dans le calcul de la dilatation de ce dernier. En conséquence, l'application de cette méthode est restreinte au cas des trous faiblement renforcés.

3 - APPLICATION DE LA METHODE DE CALCUL DES CONCENTRATIONS DE CONTRAINTES DANS UNE PLAQUE INFINIE TROUEE ET RENFORCEE

A partir de la méthode développée dans le paragraphe précédent, nous allons déduire une relation qui nous sera utile lors de la discussion des résultats expérimentaux. En effet, un autre recoupement de la méthode peut être opéré dans le cas du cercle en traction monoaxiale. Si de plus, nous ne renforçons pas le bord du trou, il est possible de calculer la valeur moyenne de la composante de la contrainte correspondante sur une distance e variable à partir du bord du trou, ce qui correspond aux valeurs mesurées dans toutes les vérifications expérimentales.

Deux méthodes de calcul s'offrent à nous :

1) Reprendre les calculs précédents applicables à l'ellipse en traction à partir de l'équation (25.63).

2) Reprendre les calculs plus en amont, en considérant que l'on a, non plus une ellipse d'excentricité particulière mais un cercle. La transformation conforme est alors réduite à sa plus simple expression et l'équation (25.34) est applicable directement.

$$\frac{1}{2} b_1 - \sum_{n=o}^{\infty} \left| a_n (1+nQ) \sum_{j=1}^{\infty} j\, Cj \cos (n-j)\theta \right| + \sum_{n=o}^{N=1} \left| a_n \sum_{j=n+1}^{N} (j-n) \cos (j-n)\theta \right|$$

$$+ \frac{1}{8} (f_1 + f_2) \sum_{-1}^{N} Cj(1+jQ) \cos (j+1)\theta + \frac{1}{8} (f_2 - f_1)(2C_{-1} \cos 2\theta - C_1) = 0$$

En effet : P, r et Q sont des constantes :

$P = \overset{\circ}{X} + \overset{\circ}{Y} = 1$ $\qquad$ r = rayon de courbure = R

$$\text{et } Q = 2 \left| \frac{Rt}{A} + 1 + \nu \right|^{-1}$$

D'autre part, comme $z = \omega(\zeta) = R\zeta$:

$N = -1$ et $C_{-1} = 1$ et pour $j \neq -1$ tous les Cj sont nuls.

En traction monoaxiale : $f_2 = 0$ d'où l'équation :

$$\left| b_1 + \sum_{n=o} \left| a_n (1 + nQ) \cos (n + 1)\theta \right| + \frac{f_1}{8} (1 - Q) - \frac{f_1}{4} \cos 2\theta \right. = 0$$

Cette équation doit être satisfaite quel que soit θ et Q étant constant :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} b_1 + \frac{f_1}{8} (1 - Q) = 0 \\ a_o \cos \theta = 0 \\ a_1 (1 + Q) = \frac{f_1}{4} \\ a_2 (1 + 2Q) = 0 \\ \vdots \\ a_n (1 + nQ) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} b_1 = - \frac{f_1}{4} (1 - Q) \\ a_o = 0 \\ a_1 = \frac{f_1}{4(1+Q)} \\ a_2 = 0 \\ \vdots \\ a_n = 0 \end{array}$$

A partir des coefficients a_n, nous pouvons calculer la somme des contraintes principales de l'équation (25.31).

$$\sigma_s + \sigma_n = \frac{1}{P} (f_1 - 8a_1 \cos 2\theta)$$

En remplaçant cette expression dans l'équation (25.35) :

$$T = QRt\ P^{1/2} f_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+Q} \cos 2\theta\right)$$

D'où l'expression du coefficient de majoration de contraintes :

$$K = \frac{T}{Af_1} = \frac{2}{1 + \frac{A}{Rt} (1+\nu)} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{1 + \frac{2}{\frac{Rt}{A} + (1+\nu)}}\right)$$

Soit e, mesurée à partir du bord du trou, la distance sur laquelle on cherche la tension moyenne :

$$A = et \quad \text{et} \quad A/Rt = e/r$$

Le coefficient de majoration de contraintes prend alors la forme :

$$K = \frac{2}{1 + \frac{e}{R} (1+\nu)} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{1 + \frac{2}{\frac{R}{e} + (1+\nu)}}\right) \qquad (3)$$

Cette relation sera utilisée lors de la discussion des résultats expérimentaux.

Application numérique : e/R = 0,01

θ°	90	75	60	45	30	15	0
e/R = 0,01	2,92	2,66	1,95	0,98	0,02	-0,69	-0,95
Valeurs théoriques de Howland (e = o)	3,00	2,73	2,00	1,00	0,00	-0,73	-1,00

Lorsque e/R tend vers zéro, nous retrouvons les valeurs calculées par Howland.

4 - METHODE D'APPROCHE DU CALCUL DES CONTRAINTES DANS LES PLAQUES DE LARGEUR FINIE, EN TRACTION, PERCEES D'UN TROU CIRCULAIRE CENTRE SUR LEUR AXE ET RENFORCEES PAR UN BOSSAGE DE SECTION RECTANGULAIRE SYMETRIQUE PAR RAPPORT AU PLAN MOYEN DE LA PLAQUE.

Précédemment, nous avons vu qu'il était très facile de trouver une fonction de contraintes qui satisfasse les conditions aux limites sur un domaine simplement connexe. De même, bien que les calculs se compliquent très rapidement, nous avons vu qu'il était possible de trouver une fonction de contraintes valable sur un domaine doublement connexe (délimité par exemple par une droite et un cercle). Au-delà, toute complication dans la frontière du domaine (l'adjonction d'un bossage par exemple) rend les développements mathématiques inextricables. Pour obtenir une solution approchée, il est alors nécessaire de faire des hypothèses simplificatrices. Par exemple, dans ses théories, Wittrick |13| , |14|, |15|, |16| a supposé que les efforts dans les bossages, autres que la traction tangente à la frontière du trou étaient négligeables et de plus que cette traction était constante dans toute la section du renforcement. Ces concessions faites, Wittrick obtient des résultats qui sont des valeurs moyennes dans une zone, différentes des valeurs ponctuelles.

Partant dans le même esprit, et en faisant des simplifications analogues par rapport à la réalité, nous proposons dans ce paragraphe une méthode permettant de calculer les contraintes dans les plaques de largeur finie, en traction, percées d'un trou circulaire centré sur leur axe et renforcées par un bossage de section rectangulaire symétrique par rapport au plan moyen de la plaque.

Soit une telle plaque représentée Fig. 4.1 et posons :

- $2b$: largeur de la plaque
- c : rayon extérieur du renforcement
- a : rayon du trou circulaire
- e_1 : épaisseur de la plaque
- e_o : épaisseur du bossage
- t : e_o/e_1 rapport des épaisseurs

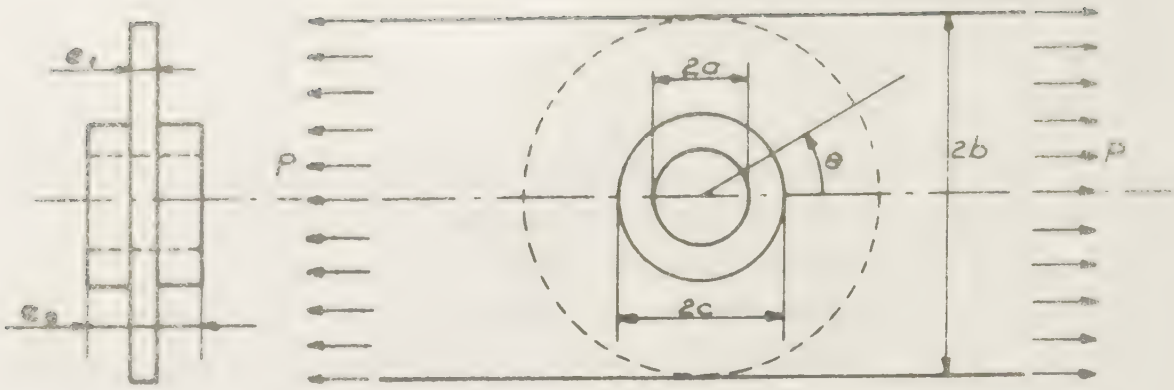


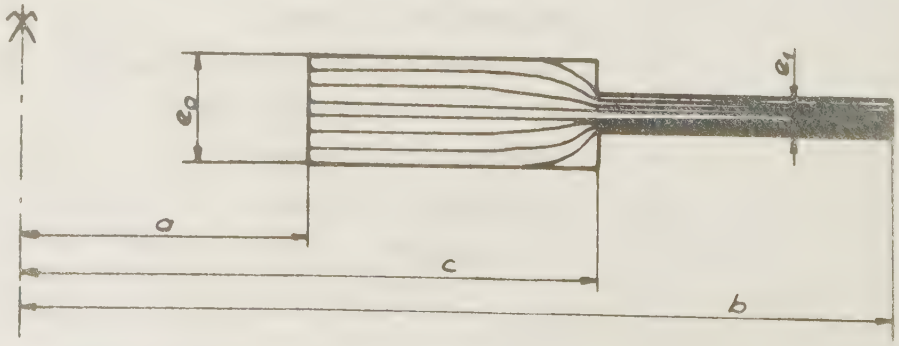
Fig.(4,1.)

D'après les résultats théoriques (21.1) et les résultats expérimentaux qui suivent, nous remarquons que les perturbations dues à la présence d'un trou dans une plaque en traction sont extrêmement localisées. Nous pouvons assurer qu'elles le seront encore plus dans le cas d'une plaque renforcée. A la limite, il est même possible de déterminer dans une plaque infinie une section de bossage évolutive |17| telle que les majorations de contraintes dues à la présence du trou soient annulées. Nous allons utiliser cette hypothèse pour déterminer la répartition des contraintes. Supposons que sur la circonférence de diamètre 2b, les contraintes ne soient pas modifiées par la présence simultanée du trou et du bossage. Dans ces conditions, nous obtenons pour r = b la distribution de contraintes suivante, correspondant à une traction uniforme p, appliquée dans la direction θ = 0.

$$\sigma_r = \frac{p}{2}(1 + \cos 2\theta)$$
$$\tau_{r\theta} = -\frac{p}{2}\sin 2\theta \qquad (4.1)$$

Examinons la répartition des contraintes à l'intérieur de cette circonférence de diamètre 2b. Nous supposerons une discontinuité dans la répartition des contraintes au raccordement de la plaque avec le bossage correspondant à la discontinuité dans l'épaisseur. Cette hypothèse est approximative si on considère la variation de contraintes dans l'épaisseur du bossage. En effet, selon le schéma (4.2) nous avons un cisaillement dans l'épaisseur du bossage.

Fig. (4.2.)
Isostatiques



Ainsi les valeurs que nous obtiendrons seront des valeurs moyennes selon l'épaisseur.

Les contraintes en (4.1) correspondent à la superposition d'une traction radiale uniforme p/2 et du chargement correspondant aux contraintes normales p/2 cos 2θ et de cisaillement -p/2 sin 2θ.

Calculons la contribution de chaque chargement dans la répartition des contraintes à l'intérieur de la circonférence de diamètre 2b que nous pouvons considérer comme deux couronnes concentriques soudées sur la circonférence de diamètre commun 2c.

- Contraintes dues à la traction uniforme p/2 :

Nous pouvons appliquer les formules bien connues des cylindres épais en affectant des indices 0 et 1 ce qui concerne respectivement le bossage et le reste du disque :

$$\begin{cases} \sigma_{or} = A'_o + \dfrac{B'_o}{r^2} \\ \sigma_{o\theta} = A'_o + \dfrac{B'_o}{r^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_{1r} = A'_1 + \dfrac{B'_1}{r^2} \\ \sigma_{1\theta} = A'_1 - \dfrac{B'_1}{r^2} \end{cases}$$

Les quatre constantes A'_o, B'_o, A'_1, B'_1 seront déterminées par les conditions aux limites suivantes :

a) pour $r = b$: $\sigma_{1r} = p/2$

b) pour $r = a$: $\sigma_{or} = 0$

c) il y a équilibre des forces normales au raccordement entre le bossage et la plaque. En supposant une répartition uniforme des contraintes selon l'épaisseur, cela revient à supposer une discontinuité des contraintes associée à la discontinuité dans les épaisseurs :

pour $r = c$: $\sigma_{1r} = t\sigma_{or}$

d) il y a continuité dans les déformations et la variation de c est la même dans le bossage comme dans la plaque :

pour $r = c$: $\dfrac{\Delta R}{R} = \sigma_{1\theta} - \nu\sigma_{1r} = \sigma_{o\theta} - \nu\sigma_{or}$

Nous obtenons ainsi le système suivant :

$$A'_1 + \frac{B'_1}{c^2} = \frac{p}{2}$$

$$A'_o + \frac{B'_o}{a^2} = 0$$

$$A'_1 + \frac{B'_1}{c^2} = t(A'_o + \frac{B'_o}{c^2})$$

$$\frac{B'_1}{c^2} - (A'_1 + \frac{B'_1}{c^2}) = A'_o - \frac{B'_o}{c^2} - \nu(A'_o + \frac{B'_o}{c^2})$$

dont la résolution donne les équations (4.2)

$$A'_o = -\frac{p}{2}\left| \frac{\frac{1}{a^2-c^2} + \frac{(1-\nu) + \frac{(1-\nu)c^2+(1+\nu)a^2}{t(a^2-c^2)}}{\frac{(1-\nu)c^2+(1+\nu)b^2}{a^2c^2(b^2-c^2)}\left[t(a^2-c^2)\right] - \frac{(1-\nu)c^2+(1+\nu)a^2}{a^2c^2}}\right|$$

$$B'_o = -\frac{p}{2}\left| \frac{\frac{1}{c^2-a^2} + \frac{(1-\nu) + \frac{(1+\nu)c^2+(1+\nu)a^2}{t(a^2-c^2)}}{\frac{(1-\nu)c^2+(1+\nu)b^2}{a^2c^2(b^2-c^2)}\left[t(a^2-c^2)\right] - \frac{(1-\nu)c^2+(1+\nu)a^2}{a^2c^2}}\right|$$

$$A'_1 = \frac{p}{2}\left| b^2 - \frac{(1-\nu) + \frac{(1-\nu)c^2+(1+\nu)a^2}{t(a^2-c^2)}}{\frac{(1-\nu)c^2+(1+\nu)b^2}{b^2c^2} - \frac{b^2-c^2}{b^2c^2}\,\frac{(1-\nu)c^2+(1+\nu)a^2}{t(a^2-c^2)}}\right|$$

$$B'_1 = \frac{p}{2}\,\frac{(1-\nu) + \frac{(1-\nu)c^2+(1+\nu)a^2}{t(a^2-c^2)}}{\frac{(1-\nu)c^2+(1+\nu)b^2}{b^2c^2} - \frac{b^2-c^2}{b^2c^2}\,\frac{(1-\nu)c^2+(1+\nu)a^2}{t(a^2-c^2)}}$$

- Contraintes dues à l'effort normal $\frac{p}{2}\cos 2\theta$ et au cisaillement $-\frac{p}{2}\sin 2\theta$

Soient Φ_o et Φ_1 les fonctions de contraintes dans le bossage et dans la plaque satisfaisant les conditions aux limites :

$$\Phi_o = (A_o r^2 + B_o r^4 + C_o \frac{1}{r^2} + D_o)\cos 2\theta$$

$$\Phi_1 = (A_1 r^2 + B_1 r^4 + C_1 \frac{1}{r^2} + D_1)\cos 2\theta$$

Par dérivation, nous obtenons les contraintes :

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\delta\Phi}{\delta r} + \frac{1}{r^2}\frac{\delta^2\Phi}{\delta\theta^2} = -\left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2}\right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\delta^2\Phi}{\delta r^2} = \left(2A + 12\,Br^2 + \frac{6C}{r^4}\right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\delta}{\delta r}\left(\frac{1}{r}\frac{\delta\Phi}{\delta\theta}\right) = \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2}\right) \sin 2\theta$$

Il reste à déterminer ces huit constantes à l'aide des conditions aux limites que doivent satisfaire les contraintes :

a) pour $r = b$: $\sigma_{1r} = \frac{p}{2} \cos 2\theta$

$$(\sigma_{1r})_{r=b} = -\left(2A_1 + \frac{6C_1}{b^4} + \frac{4D_1}{b^2}\right) \cos 2\theta$$

$$\text{d'où} \quad 2A_1 + \frac{6C_1}{b^4} + \frac{4D_1}{b^2} = -\frac{p}{2} \tag{4.3}$$

b) pour $r = a$: $\sigma_{or} = 0$

$$(\sigma_{or})_{r=a} = -\left(2A_o + \frac{6C_o}{a^4} + \frac{4D_o}{a^2}\right) \cos 2\theta$$

$$\text{d'où} \quad 2A_o + \frac{6C_o}{a^4} + \frac{4D_o}{a^2} = 0 \tag{4.4}$$

c) pour $r = b$: $\tau_{1r\theta} = -\frac{p}{2} \sin 2\theta$

$$(\tau_{1r\theta})_{r=b} = \left(2A_1 + 6B_1b^2 - \frac{6C_1}{b^4} - \frac{2D_1}{b^2}\right) \sin 2\theta$$

$$\text{d'où} \quad 2A_1 + 6B_1b^2 - \frac{6C_1}{b^4} - \frac{2D_1}{b^2} = -\frac{p}{2} \tag{4.5}$$

d) pour $r = a$: $\tau_{or\theta} = 0$

$$(\tau_{or\theta})_{r=a} = \left(2A_o + 6B_oa^2 - \frac{6C_o}{a^4} - \frac{2D_o}{a^2}\right) \sin 2\theta$$

$$\text{d'où} \quad 2A_o + 6B_oa^2 - \frac{6C_o}{a^4} - \frac{2D_o}{a^2} = 0 \tag{4.6}$$

e) il y a équilibre des forces normales au raccordement entre le bossage et la plaque. D'où en supposant une répartition uniforme des contraintes selon l'épaisseur :

$$(\sigma_{1r})_{r=c} = t(\sigma_{or})_{r=c}$$

$$-(2A_1 + \frac{6C_1}{c^4} + \frac{4D_1}{c^2}) \cos 2\theta = - t(2A_o + \frac{6C_o}{c^4} + \frac{4D_o}{c^2}) \cos 2\theta$$

$$\text{d'où : } 2A_1 + \frac{6C_1}{c^4} + \frac{4D_1}{c^2} = - t(2A_o + \frac{6C_o}{c^4} + \frac{4D_o}{c^2} \qquad (4.7)$$

f) Pour le cisaillement, nous devons avoir la même chose qu'en e)

$$(\tau_{1r\theta})_{r=c} = t(\tau_{or\theta})_{r=c}$$

$$\text{d'où } 2A_1 + 6B_1C^2 - \frac{6C_1}{c^4} - \frac{2D_1}{c^2} = t(2A_o + 6B_oC^2 - \frac{6C_o}{c^4} - \frac{2D_o}{c^2}) \qquad (4.8)$$

g) Au raccordement entre la plaque et le bossage, nous devons avoir continuité des déplacements radiaux et tangentiels. Nous avons :

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\delta u}{\delta r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\delta v}{\delta \theta} + \frac{u}{r} \\ 2\gamma_{r\theta} &= \frac{\delta v}{\delta r} + \frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta \theta} - \frac{v}{r} \end{aligned}\right\} \qquad (4.9)$$

Entre les contraintes et les déformations, nous avons les relations :

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r)$$

$$2\gamma_{r\theta} = \frac{1}{G}\tau_{r\theta}$$

d'où, en remplaçant les contraintes par leurs valeurs :

$$\varepsilon_r = -\frac{1}{E}\left|2A(1+\nu) + \frac{6C}{r^4}(1+\nu) + \frac{4D}{r^2} + 12\nu Br^2\right| \cos 2\theta$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left|2A(1+\nu) + \frac{6C}{r^4}(1+\nu) + \nu\frac{4D}{r^2} + 12Br^2\right| \cos 2\theta$$

$$2\gamma_{r\theta} = \frac{1}{G}\left|2A + 6Br^2 + \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2}\right| \sin 2\theta$$

Comme $\varepsilon_r = \frac{\delta u}{\delta r}$, en intégrant nous obtenons pour u :

$$u = -\frac{1}{E}\left|2A(1+\nu)r - \frac{2C}{r^3}(1+\nu) - \frac{4D}{r} + 4\nu Br^3\right|\cos 2\theta + f(\theta)$$

$f(\theta)$ désigne une fonction de θ ou une constante

En reportant cette valeur de u ainsi obtenue dans la deuxième équation (4.9) nous obtenons :

$$\frac{\delta v}{\delta\theta} = \frac{1}{E}\cos 2\theta\left|4A(1+\nu)r + \frac{4C}{r^3}(1+\nu) - \frac{4D}{r}(1-\nu) + 4Br^3(3+\nu)\right| - f(\theta)$$

par intégration :

$$v = \frac{\sin 2\theta}{E}\left|2A(1+\nu)\ r + \frac{2C}{r^3}(1+\nu) - \frac{2D}{r}(1-\nu) + 2Br^3\ (3+\nu)\right| - F(\theta) + g(r)$$

avec $F(\theta) = \int f(\theta)d\theta$ et $g(r)$ est une fonction de r ou une constante.

Les deux fonctions $f(\theta)$ et $g(r)$ seront déterminées par la condition que les déplacements u et v ainsi obtenus devront satisfaire la troisième équation (4.9) : $\frac{1}{G}\tau_{r\theta} = \frac{\delta v}{\delta r} + \frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta\theta} - \frac{v}{r}$

Après simplification, il reste la relation :

$$g'(r) - \frac{1}{r}g(r) + \frac{F(\theta)}{r} + \frac{1}{r}f'(\theta) = 0$$

avec : $g'(r) = \frac{dg(r)}{dr}$ et $f'(\theta) = \frac{df(\theta)}{d\theta}$

ou en séparant les variables :

$$rg'(r) - g(r) = -F(\theta) - f'(\theta) = \delta$$

δ ne pouvant être qu'une constante puisque cette relation doit être satisfaite quels que soient r et θ.

La résolution de ces équations différentielles conduit à :

$$g(r) = \alpha r - \delta$$
$$f(\theta) = q\cos\theta + t\sin\theta$$

α, q et t sont des constantes. Nous en déduisons les déplacements :

$$u = -\frac{\cos 2\theta}{E}\left|2A(1+\nu)r - \frac{2C}{r^3}(1+\nu) - \frac{4D}{r} + 4\nu Br^3\right| + q\cos\theta + t\sin\theta$$

$$v = \frac{\sin 2\theta}{E}\left|2A(1+\nu)r + \frac{2C}{r^3}(1+\nu) - \frac{2D}{r}(1-\nu) + 2Br^3(3+\nu)\right| - F(\theta) + \alpha r - \delta$$

Nous pouvons déterminer les quatre constantes α, δ, q et t à l'aide des conditions aux limites. En effet, par raison de symétrie, quel que soit r, nous devons avoir :

$$v = 0 \quad \text{pour } \theta = 0 \text{ et } \theta = \pi$$
$$u = 0 \quad \text{pour } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ et } \theta = \frac{3\pi}{2}$$

Comme $F(\theta) = q \sin\theta - t \cos\theta$ nous obtenons les relations :

$$-t + \alpha r - \delta = 0 \qquad\qquad -t + \alpha r - \delta = 0$$

$$-q + \alpha r - \delta = 0 \qquad\qquad q + \alpha r - \delta = 0$$

Ces relations ne peuvent être satisfaites que si :

$$\alpha = t = q = \delta = 0$$

d'où : $$u = -\frac{\cos 2\theta}{E}\left|2A(1+\nu)r - \frac{2C}{r^3}(1+\nu) - \frac{4D}{r} + 4\nu Br^3\right|$$

$$v = \frac{\sin 2\theta}{E}\left|2A(1+\nu)r + \frac{2C}{r^3}(1+\nu) - \frac{2D}{r}(1-\nu) + 2Br^3(3+\nu)\right|$$

Pour $r = c$ et quel que soit θ, les deux fonctions Φ_o et Φ_1 doivent donner les mêmes déplacements :

$$2A_o(1+\nu)c - 2\frac{C_o}{c^3}(1+\nu) - \frac{4D_o}{c} + 4\nu B_o c^3 = 2A_1(1+\nu)c - \frac{2C_1}{c^3}(1+\nu) - \frac{4D_1}{c} + 4\nu B_1 c^3 \qquad (4.10)$$

$$2A_o(1+\nu)c + \frac{2C_o}{c^3}(1+\nu) - \frac{2D_o}{c}(1-\nu) + 2B_o c^3(3+\nu) = 2A_1(1+\nu)c + \frac{2C_1}{c^3}(1+\nu) - \frac{2D_1}{c}(1-\nu) + 2B_1 c^3(3+\nu) \qquad (4.11)$$

Les équations (4.3), (4.4), (4.5), (4.6), (4.7), (4.8), (4.10) et (4.11) constituent un système de huit équations à huit inconnues dont la résolution donnerait : A_o, A_1, B_o, B_1, C_o, C_1, D_o, D_1 qui conduit à l'expression finale des contraintes. Dans le bossage :

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{or} &= A'_o + \frac{B'_o}{r^2} - \left(2A_o + \frac{6C_o}{r^4} + \frac{4D_o}{r^2}\right)\cos 2\theta \\
\sigma_{o\theta} &= A'_o - \frac{B'_o}{r^2} + \left(2A_o + 12B_o r^2 + \frac{6C_o}{r^4}\right)\cos 2\theta \\
\tau_{or\theta} &= \left(2A_o + 6B_o r^2 - \frac{6C_o}{r^4} - \frac{2D_o}{r^2}\right)\sin 2\theta
\end{aligned}\right\} \qquad (4.12)$$

Pour les contraintes dans la plaque, nous obtenons des expressions analogues en changeant les indices 0 en 1.

La résolution littérale du système de huit équations à huit inconnues présentant trop de difficultés, nous avons calculé les coefficients sur ordinateur en donnant aux paramètres les valeurs suivantes :

$a = 1$

$b = 100 ; 10 ; 5 ; 4 ; 3$

$c = 5 ; 4 ; 3{,}33 ; 3 ; 2 ; 1{,}5$

$$\lambda = \frac{a}{b} = 0,01$$

t \ c/a	5	4	3,33	3	2	1,5
1	3,000	3,000	3,000	3,000	3,000	3,000
1,2	2,671	2,684	2,698	2,708	2,761	2,806
1,5	2,294	2,319	2,347	2,367	2,474	2,566
2	1,860	1,894	1,934	1,963	2,122	2,261
3	1,352	1,391	1,438	1,472	1,672	1,858
4	1,064	1,111	1,148	1,183	1,393	1,600

$$\lambda = \frac{a}{b} = 0,1$$

t \ c/a	5	4	3,33	3	2	1,5
1	3,091	3,091	3,091	3,091	3,091	3,091
1,2	2,650	2,693	2,727	2,746	2,824	2,881
1,5	2,184	2,260	2,322	2,357	2,509	2,623
2	1,688	1,785	1,866	1,914	2,129	2,299
3	1,162	1,261	1,347	1,400	1,657	1,875
4	0,885	0,976	1,057	1,108	1,369	1,607

tableau (4-3) Concentrations de contraintes maximum au bord du trou calculées d'après les relations (4-12)

$\lambda = \frac{a}{b} = 0{,}02$

t \ c/a	4	3,33	3	2	1,5
1	3,385	3,385	3,385	3,385	3,385
1,2	2,824	2,866	2,897	3,030	3,120
1,5	2,259	2,331	2,385	2,629	2,804
2	1,690	1,777	1,845	2,169	2,418
3	1,121	1,204	1,273	1,629	1,933
4	0,837	0,910	0,973	1,317	1,634

$\lambda = \frac{a}{b} = 0{,}25$

t \ c/a	3,33	3	2	1,5
1	3,627	3,627	3,627	3,627
1,2	3,030	3,053	3,202	3,315
1,5	2,428	2,468	2,735	2,951
2	1,823	1,869	2,216	2,517
3	1,214	1,258	1,627	1,982
4	0,909	0,947	1,297	1,661

$\lambda = \frac{a}{b} = 0{,}33$

t \ c/a	2	1,5
1	4,219	4,219
1,2	3,639	3,793
1,5	3,028	3,312
2	2,379	2,761
3	1,681	2,115
4	1,308	1,741

tableau (4-4) Concentrations de contraintes maximum au bord du trou calculées d'après les relations (4-12)

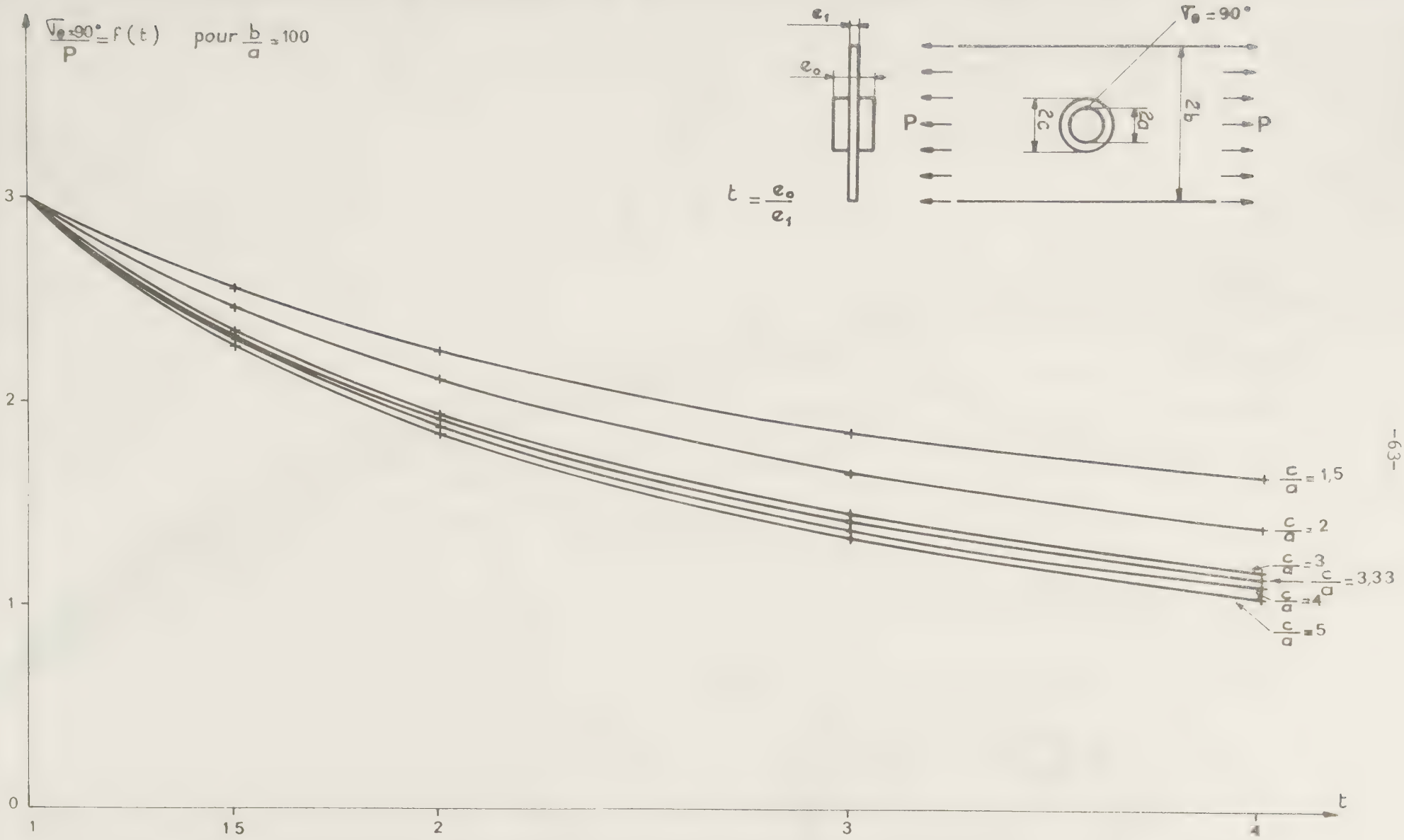


fig.(4 - 5) Concentrations de contraintes au bord du trou calculées d'après (4 - 12)

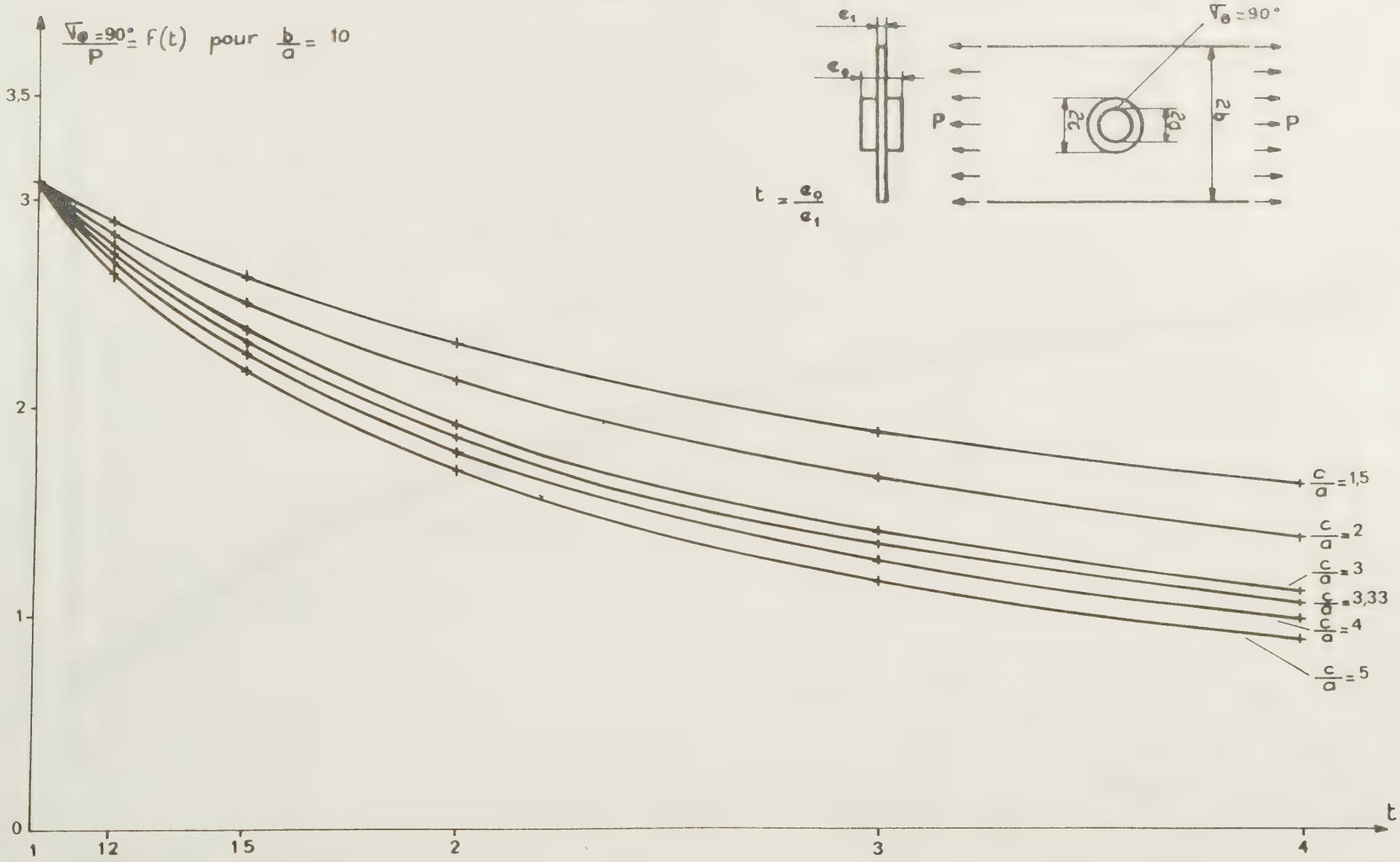


Fig. (4 _ 6) Concentrations de contraintes au bord du trou calculées d'après (4 _ 12)

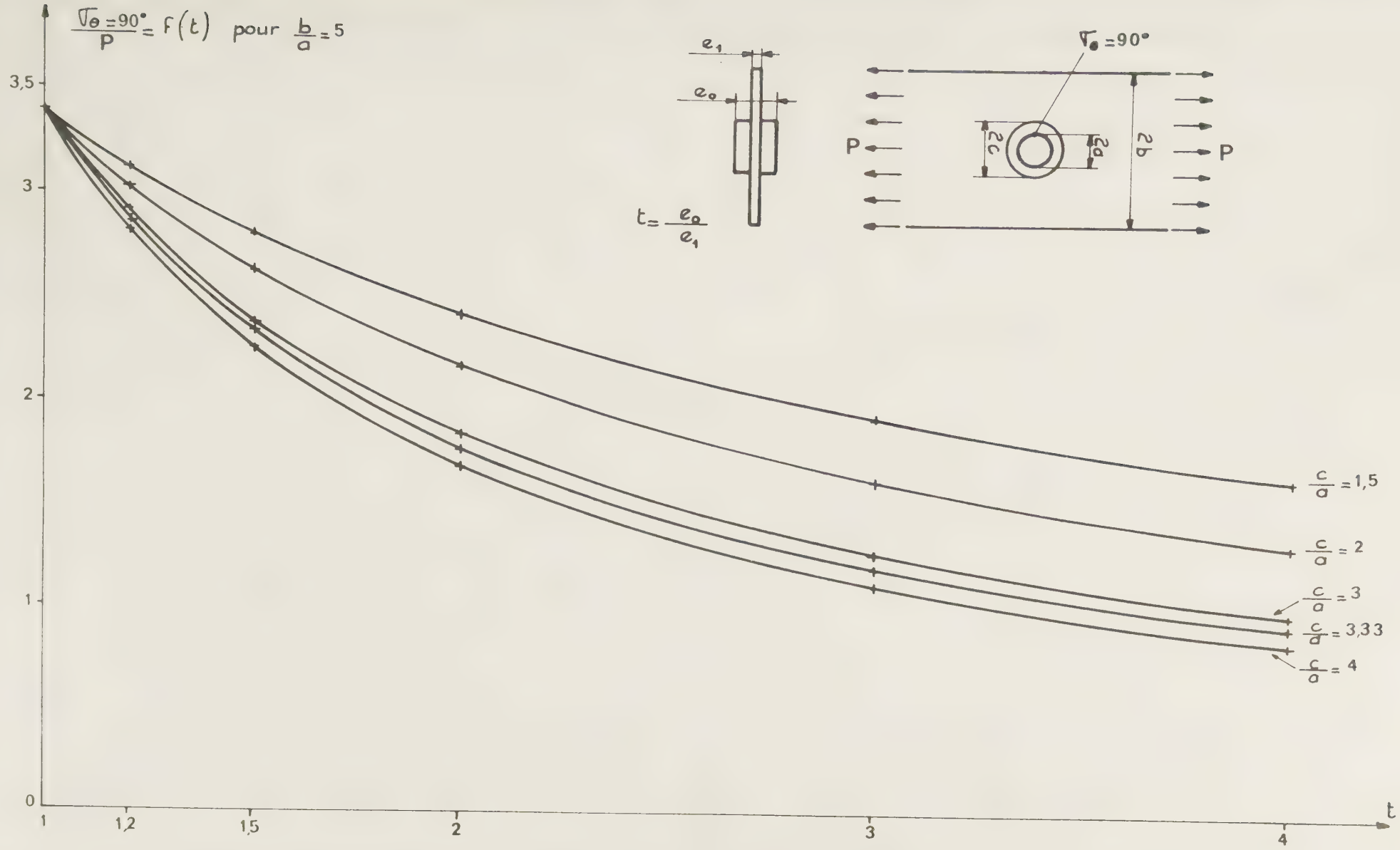


Fig. (4 – 7) Concentrations de contraintes au bord du trou calculées d'après (4_12)

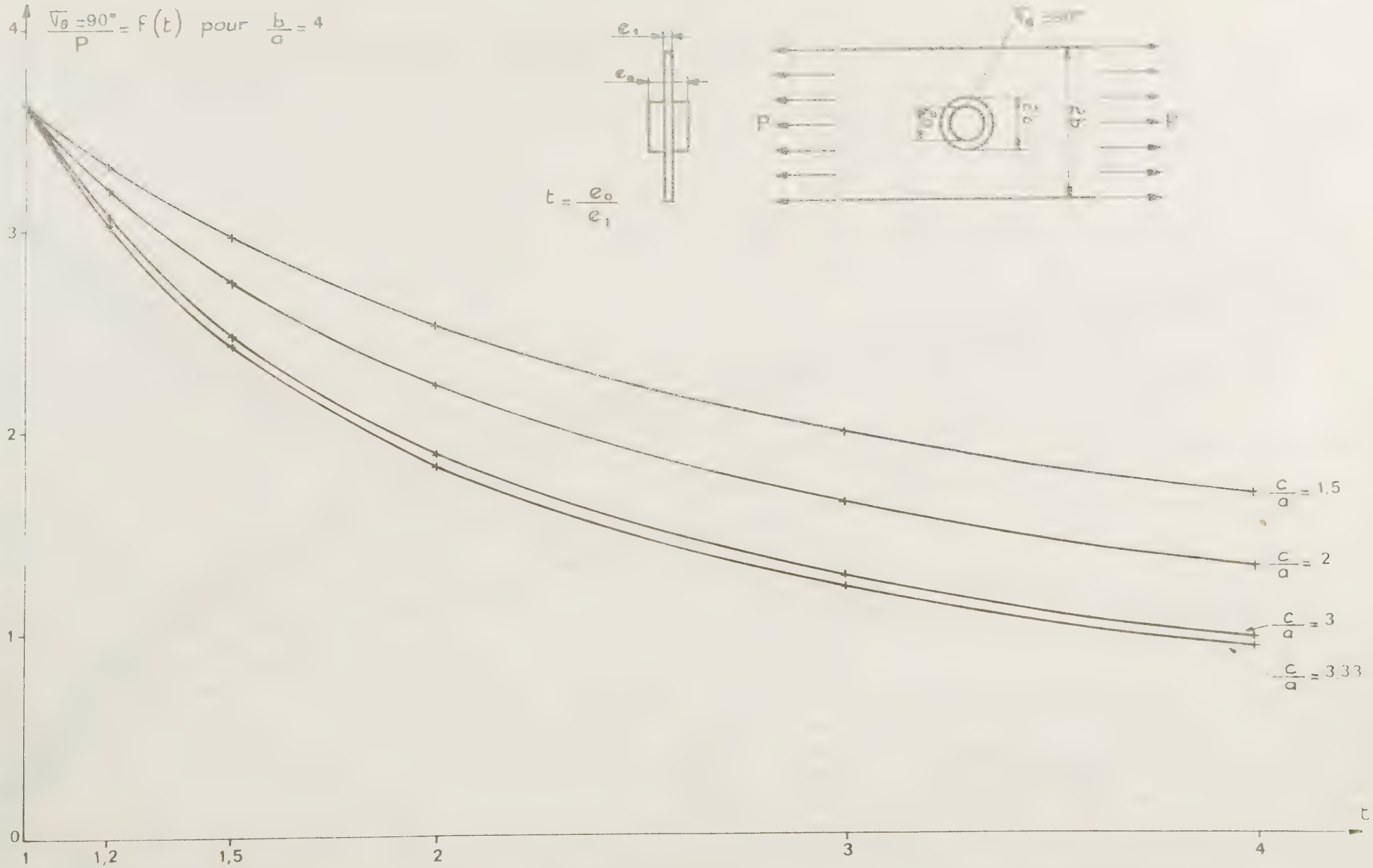


Fig. (4 - 8) Concentrations de contraintes au bord du trou calculées d'après (4-12)

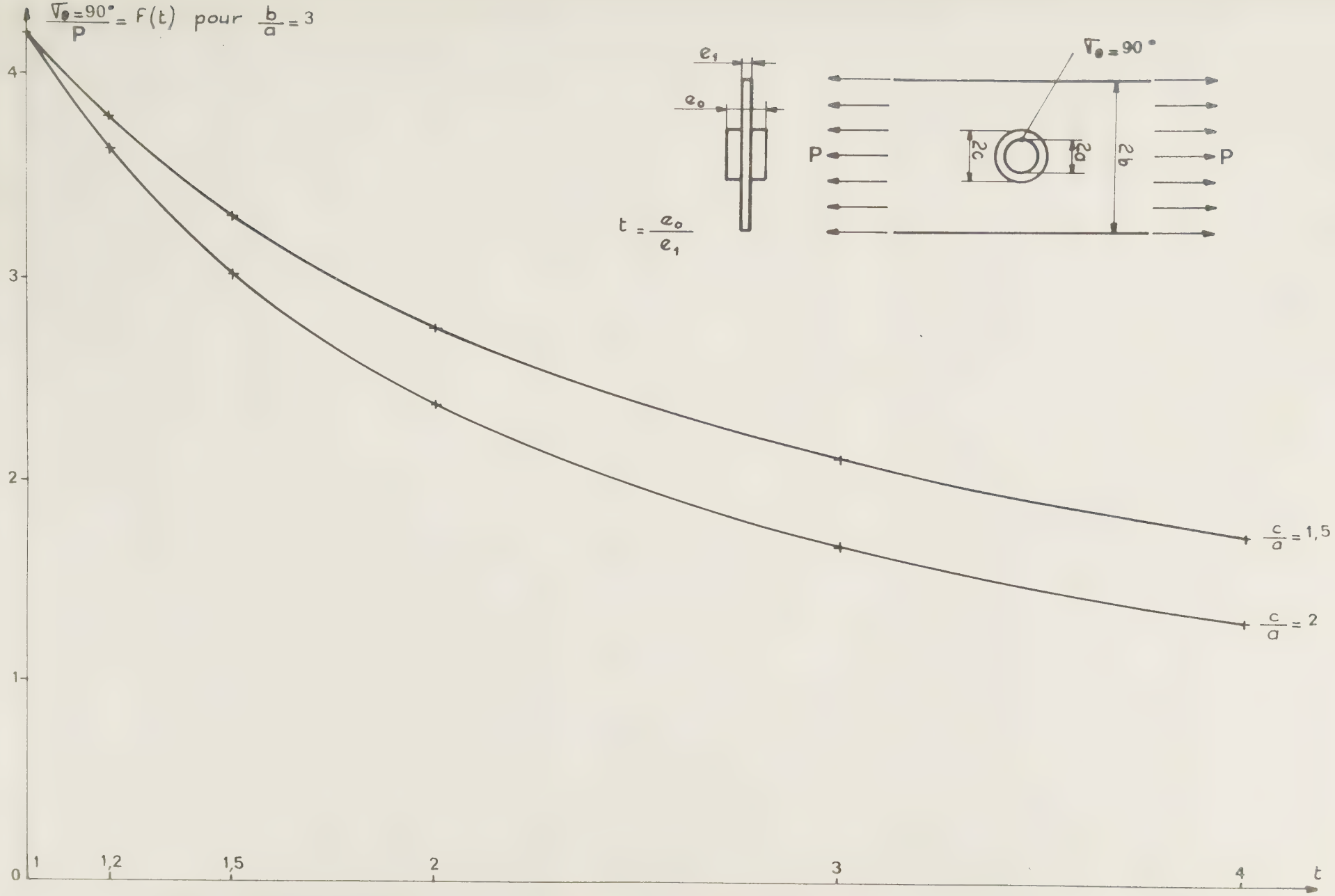


Fig. (4 - 9) Concentrations de contraintes au bord du trou calculées d'après (4 - 12)

[illegible] ; 1,1 ; 1,5 ; 2 ; 3 ; 4.

Les résultats numériques ainsi obtenus ont été portés dans les tableaux (4.3) et (4.4). Nous en avons déduit les courbes (4.5) à (4.9). Dans les deux cas, les valeurs sont celles de $\frac{\sigma_\theta}{p}$ au bord du trou, à l'extrêmité du diamètre perpendiculaire à la direction de la tension, point où le coefficient de majoration de contraintes est maximum.

Cette méthode pourrait permettre, à la limite, d'obtenir la majoration de contraintes dans la plaque sans bossage, en donnant à t la valeur 1. Mais en tendant vers cette valeur de t = 1, nous nous éloignons notablement de l'hypothèse de départ qui suppose que le bossage annule la perturbation introduite par la présence du trou à la distance $\frac{b}{2}$ du trou. Néanmoins, les valeurs ainsi obtenues recoupent bien les valeurs de Howland pour les faibles valeurs de λ. La divergence s'accentue lorsque λ croît et pour $\lambda = 0,3$ nous obtenons 3,95 alors que Howland trouve 3,36, ce qui constitue une différence de 17 %.

5 - ETUDE EXPERIMENTALE PERSONNELLE

5,1 - *METHODE* -

Les mesures suivantes ont été obtenues en photoélasticité à l'aide d'un photoélasticimètre bidimensionnel, type Robert, licence STCAN, fabriqué par Jobin et Yvon. Cet appareil, utilisant les propriétés de biréfringence des matériaux, bien connue puise son originalité dans le procédé d'analyse de la lumière qui permet un affichage digital des résultats.

5,11 - *Principe du photoélasticimètre Robert* :

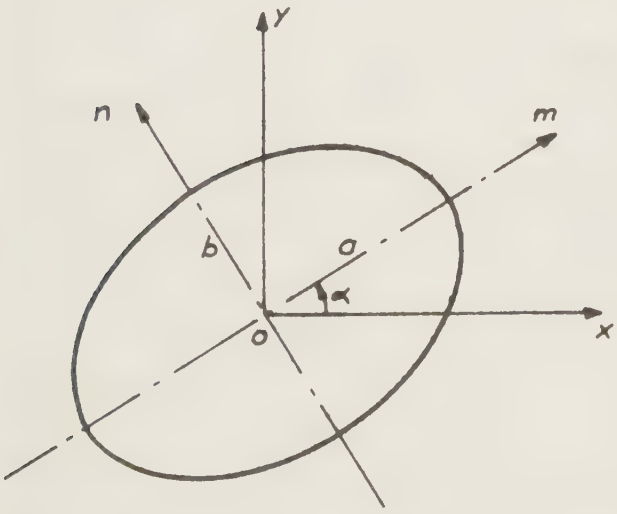


Fig. 5.1

Une vibration lumineuse monochromatique est caractérisée par ses demi-axes a et b et par l'angle α, défini à π près que fait son grand axe avec l'axe horizontal OX de référence (Fig. 5.1)

A l'aide de la sphère de Poincaré, nous obtenons une relation biunivoque entre un point de cette sphère et une forme de lumière donnée. Cette sphère est ainsi définie (Fig. 5.2) : rayon unité, centre O, l'axe vertical OZ la coupe en P et P' et le plan équatorial est défini par XOY.

Le repèrage d'une vibration elliptique sur la sphère de Poincaré se fait de la manière suivante :

Soit un point M appartenant à la surface de la sphère. Le méridien passant par M coupe l'équateur en m. L'angle (OX, Om) est égal à 2α et en posant $\operatorname{tg} \gamma = \frac{b}{a} \leqslant 1$, nous avons la relation $mOM = 2\gamma$.
2γ est compté positivement dans l'hémisphère supérieur et le point représentatif M correspond à une vibration droite.

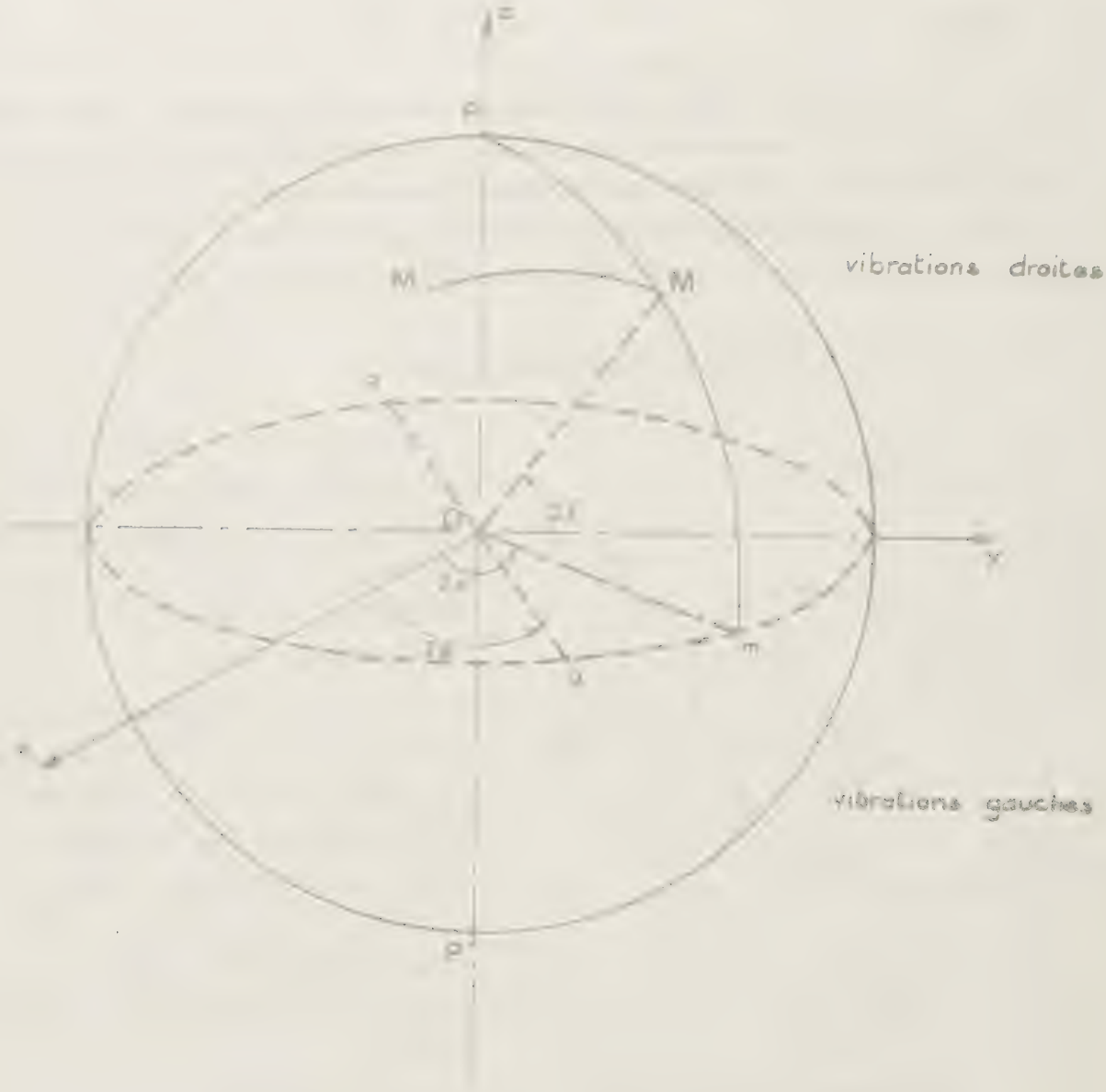


Fig (1-4)

2γ est compté négativement dans l'hémisphère inférieur et le point représentatif M correspond à une vibration gauche.

Les parallèles représentent des vibrations de même aplatissement et de même sens, les méridiens des vibrations ayant leurs directions d'axes confondues. Sur l'équateur, les vibrations sont rectilignes et en P et P', les vibrations sont circulaires, respectivement à droite et à gauche.

Un biréfringent possède deux axes orthogonaux de propagation, l'un rapide, l'autre lent. La différence des vitesses de propagation introduit un déphasage ϕ entre les deux composantes, proportionnel à la différence des contraintes principales. Sur la sphère de Poincaré, ce biréfringent correspond à une rotation ϕ dans le sens direct autour d'un axe qq' situé dans le plan équatorial, les points q et q' correspondant respectivement au double des angles θ entre OX et les axes rapide et lent. C'est ainsi qu'une forme de lumière M à l'entrée d'un biréfringent en ressort avec les caractéristiques associées au point M' déduit du point M par une rotation ϕ autour de l'axe qq'.

Réciproquement, connaissant les formes de lumière M et M' à l'entrée et à la sortie du biréfringent, il est possible d'en déduire les propriétés du biréfringent qui a été traversé.

Afin de simplifier le raisonnement, supposons que le point représentatif de la lumière incidente soit en P (lumière polarisée circulaire droite et monochromatique). Sur le trajet de cette lumière, interposons un biréfringent dont le déphasage ϕ est inférieur à $\frac{\pi}{2}$, son axe rapide faisant un angle θ avec la direction de référence. La vibration, à la sortie du biréfringent se déduit de P par une rotation ϕ autour de l'axe qq'. Le flux lumineux recueilli à travers un analyseur est alors de la forme :

$$E = \frac{a^2 + b^2}{2} \left| 1 + \sin \phi \cos 2 (\beta - \alpha) \right|$$

expression dans laquelle β représente l'angle entre l'analyseur et la direction de référence.

En faisant tourner l'analyseur à vitesse constante de pulsation ω, nous obtenons deux flux superposés, l'un constant, l'autre périodique :

$$E_1 = \frac{a^2 + b^2}{2} \qquad E_2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \sin \phi \cos 2 (\omega t - \alpha)$$

Ce flux, en tombant sur un photomultiplicateur donne naissance à deux tensions E_1 et E_2 respectivement proportionnelles à E_1 et E_2. Ainsi, $\sin \phi$ caractérisant l'aplatissement de l'ellipse est obtenu en faisant le rapport entre l'amplitude de la tension alternative E_1 et la tension continue E_1. La phase 2α du signal alternatif par rapport à un signal de référence $\cos 2\,\omega t$ lié au double de la rota-

tion de l'analyseur caractérise la position du demi-grand axe de l'ellipse de lumière.

Interprétation des résultats expérimentaux :

A partir de sin ϕ et de l'angle 2α , il est possible de déterminer complètement le biréfringent qui a été traversé et par conséquent de caractériser l'état de contraintes du matériau. En effet, pour déterminer ϕ à partir de sin ϕ, il suffit de procéder par continuité à partir d'un point connu du modèle ou, lorsque cela est possible, de charger progressivement la maquette étudiée. D'autre part, il est possible de relier la valeur 2α à la valeur de l'angle η que fait la direction de référence avec la direction de la plus grande des deux contraintes principales en valeur algébrique.

La représentation de Poincaré montre que dans le cas d'une lumière incidente circulaire droite, le grand axe de l'ellipse de lumière se déduit de l'axe rapide du biréfringent par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ autour de la ligne des pôles si $0 < \phi < \pi$ et par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ si $\pi < \phi < 2\pi$. Ces résultats s'inversent si la lumière incidente est circulaire gauche.

D'autre part, l'axe rapide du biréfringent est confondu avec la plus petite des deux contraintes principales en valeur algébrique si le coefficient photoélastique du modèle est positif. Il lui est orthogonal si le coefficient photoélastique du modèle est négatif. En résumé, nous avons la relation suivante donnant l'angle η en degrés de la plus grande des deux contraintes principales en valeur algébrique avec la direction de référence horizontale :

$$\eta = \alpha + \varepsilon\varepsilon' \, 45° + (k - 2) \, 90°$$

avec : $k = 1$ si le coefficient photoélastique du modèle est positif

$k = 0$ si le coefficient photoélastique du modèle est négatif

$\varepsilon' = 1$ si la lumière incidente est circulaire droite

$\varepsilon' = -1$ si la lumière incidente est circulaire gauche

$\varepsilon = 1$ si $0 < \phi < \pi$

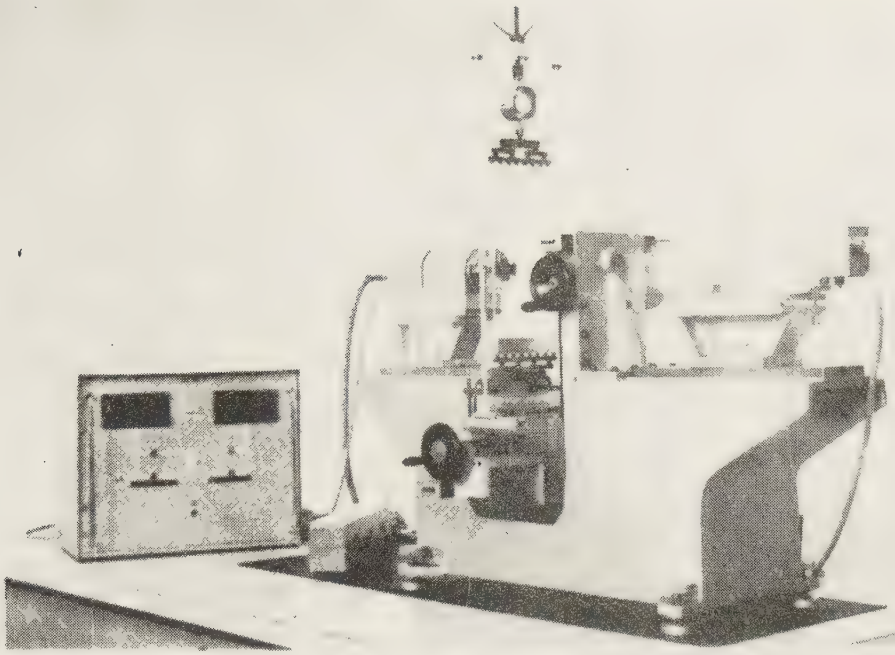
$\varepsilon = -1$ si $\pi < \phi < 2\pi$

Nous exploiterons ultérieurement ces résultats lors de la séparation des contraintes principales.

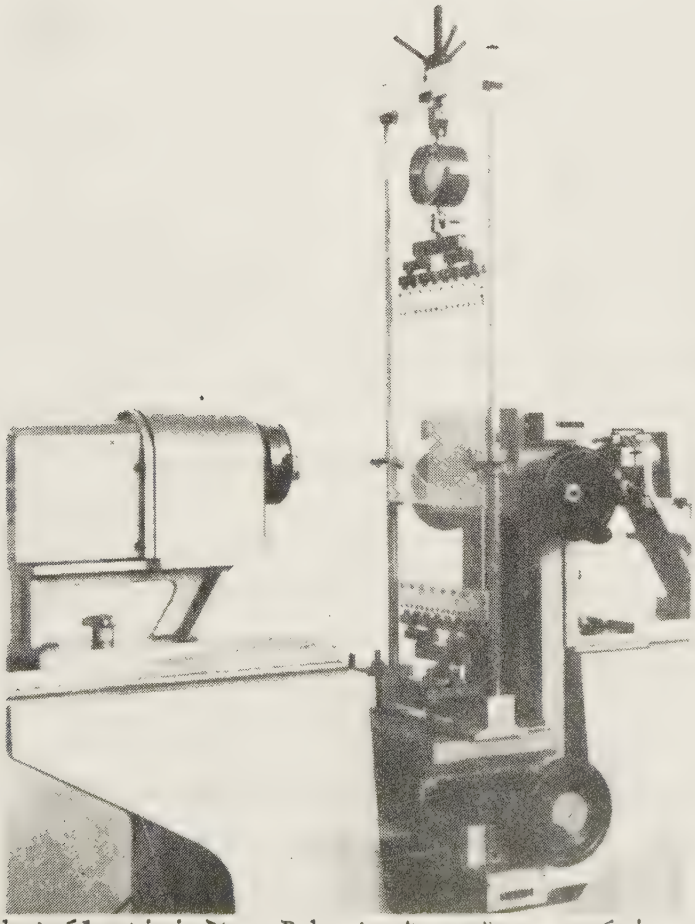
5,12 - *Description de l'appareil* :

Sur les photographies (5.3) il est possible de reconnaître les différents organes décrits ci-dessus.

La source lumineuse est un laser hélium-néon de la Compagnie C.S.F. ayant les principales caractéristiques suivantes :



5.3 a - Photoélasticimètre Robert



5.3 b - Photoélasticimètre Robert et montage expérimental

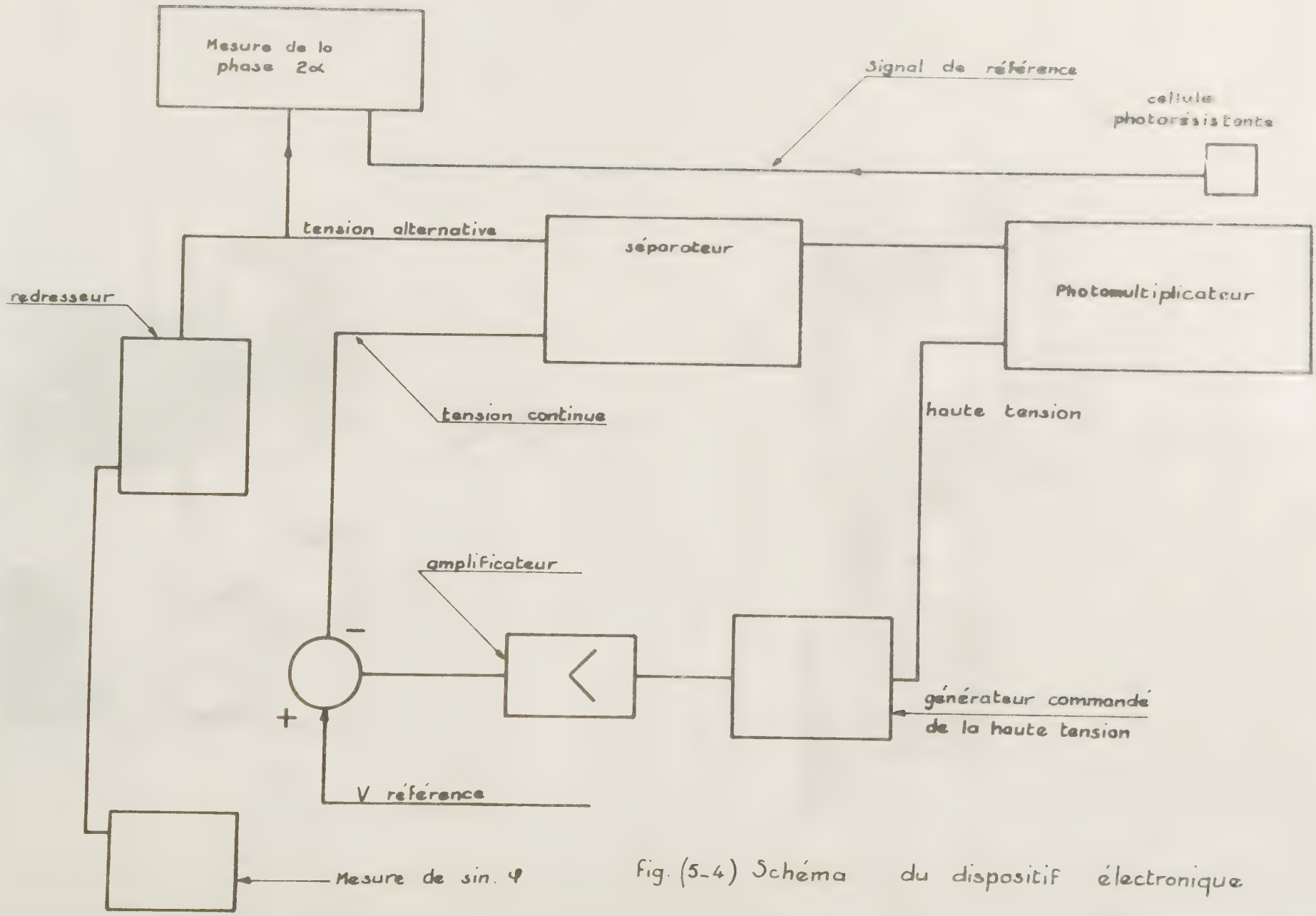


Fig. (5-4) Schéma du dispositif électronique

- longueur d'onde : 6 328 Å
- puissance : 1 mW
- faisceau : polarisation plane
  diamètre 1,8 mm
  divergence 0,8 milliradian

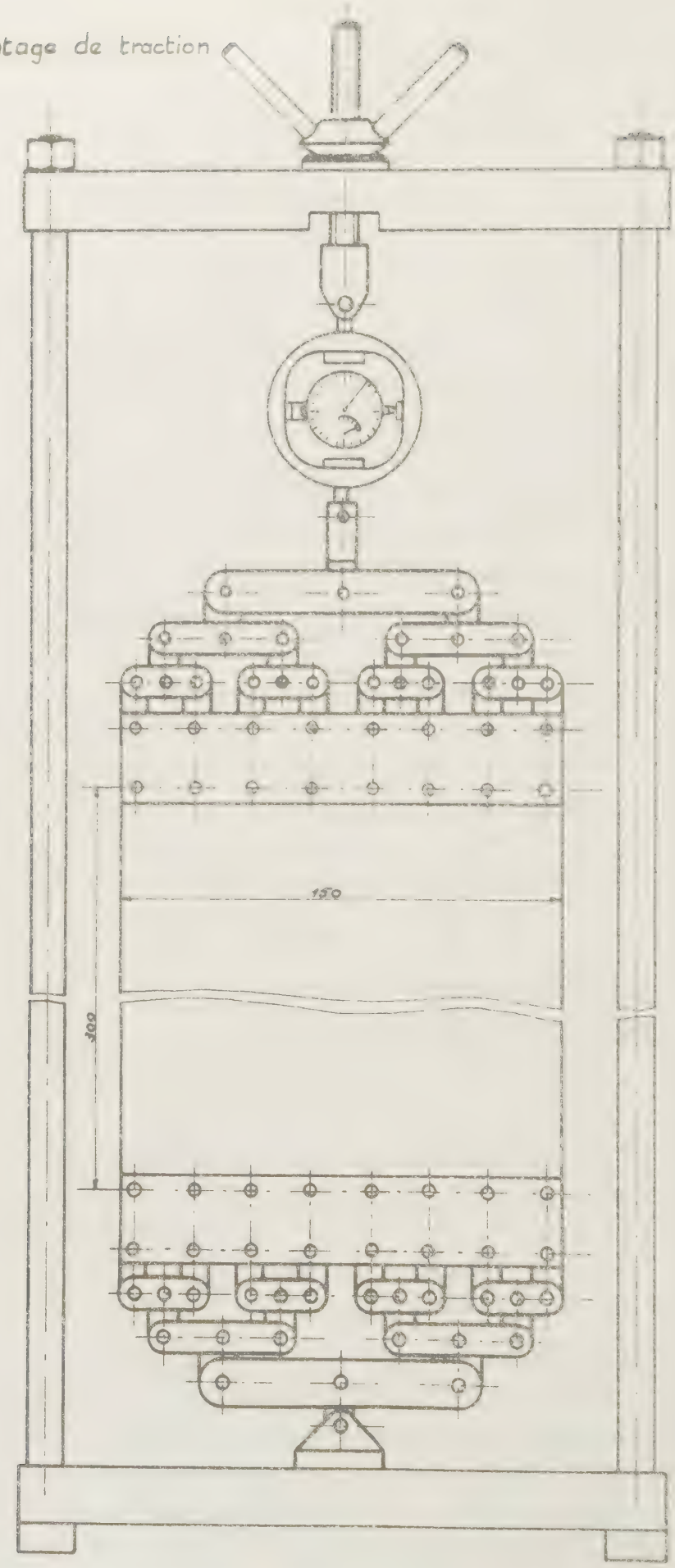
Le faisceau traverse une lame quart d'onde réglable qui transforme la lumière polarisée plane du laser en lumière circulaire. Un dispositif optique concentre le rayon lumineux sur la maquette de telle façon que les dimensions de la zone de mesure soient réduites à quelques centièmes de millimètres. Le modèle est fixé sur une table pouvant se déplacer selon deux directions orthogonales. Les déplacements de cette table sont contrôlés par deux compteurs affichant le dixième de millimètre. A la sortie du modèle, le rayon lumineux traverse alors une feuille de polaroïd tournant à la fréquence de 400 hertz puis tombe sur un photomultiplicateur. Le signal fourni par le photomultiplicateur est traité puis analysé dans un "bloc électronique" dont le schéma est représenté Fig. 5.4. Le gain du photomultiplicateur est asservi de façon telle que la tension continue soit maintenue fixe quelles que soient les fluctuations du faisceau lumineux tombant sur le photomultiplicateur. La comparaison de la tension alternative E_2 avec un signal de référence émanant d'une cellule photorésistante donne la phase 2α. La mesure de $\sin \phi$ est obtenue directement à partir de E_2, la tension continue E_1 étant constante. Deux voltmètres digitaux affichent directement les résultats 2α en degrés et $\sin \phi$ avec trois décimales. Ainsi, en théorie, la précision sur 2α est de l'ordre du degré et celle sur $\sin \phi$ est de l'ordre du millième.

5,13 - Montage expérimental

Afin de solliciter l'éprouvette en traction uniforme, nous avons réalisé le montage de la Fig. 5,5 permettant l'étude des plaques de 300 mm de longueur par 150 mm de largeur et de 3 ou 4 mm d'épaisseur. La traction uniforme est transmise par l'intermédiaire de deux palonniers. La tension sur les palonniers est appliquée par un système de vis-écrou, ce qui permet une variation continue de la contrainte nominale appliquée sur la plaque. Un dynamomètre Testwell (gamme de 0 à 5 000 N) donne l'ordre de grandeur du chargement. L'ensemble du montage est fixé sur la table du photoélasticimètre (Fig. 5.3 b).

En certaines occasions, nous avons dû utiliser un bac rempli de liquide de même indice que le modèle (Fig. 5.6), constitué par un mélange d'huile de vaseline (indice 1,4676) et de phénochlore (indice 1,6848), l'indice de l'altuglass étant voisin de 1,4898. Cette précaution est utile pour les mesures sur les bords, surtout lorsque ceux-ci ne sont pas nets ou insuffisamment polis. Il se produit alors une diffraction du rayon lumineux qui ne peut être évitée qu'en plongeant la pièce étudiée dans un liquide de même indice.

Fig. (5-5) Montage de traction



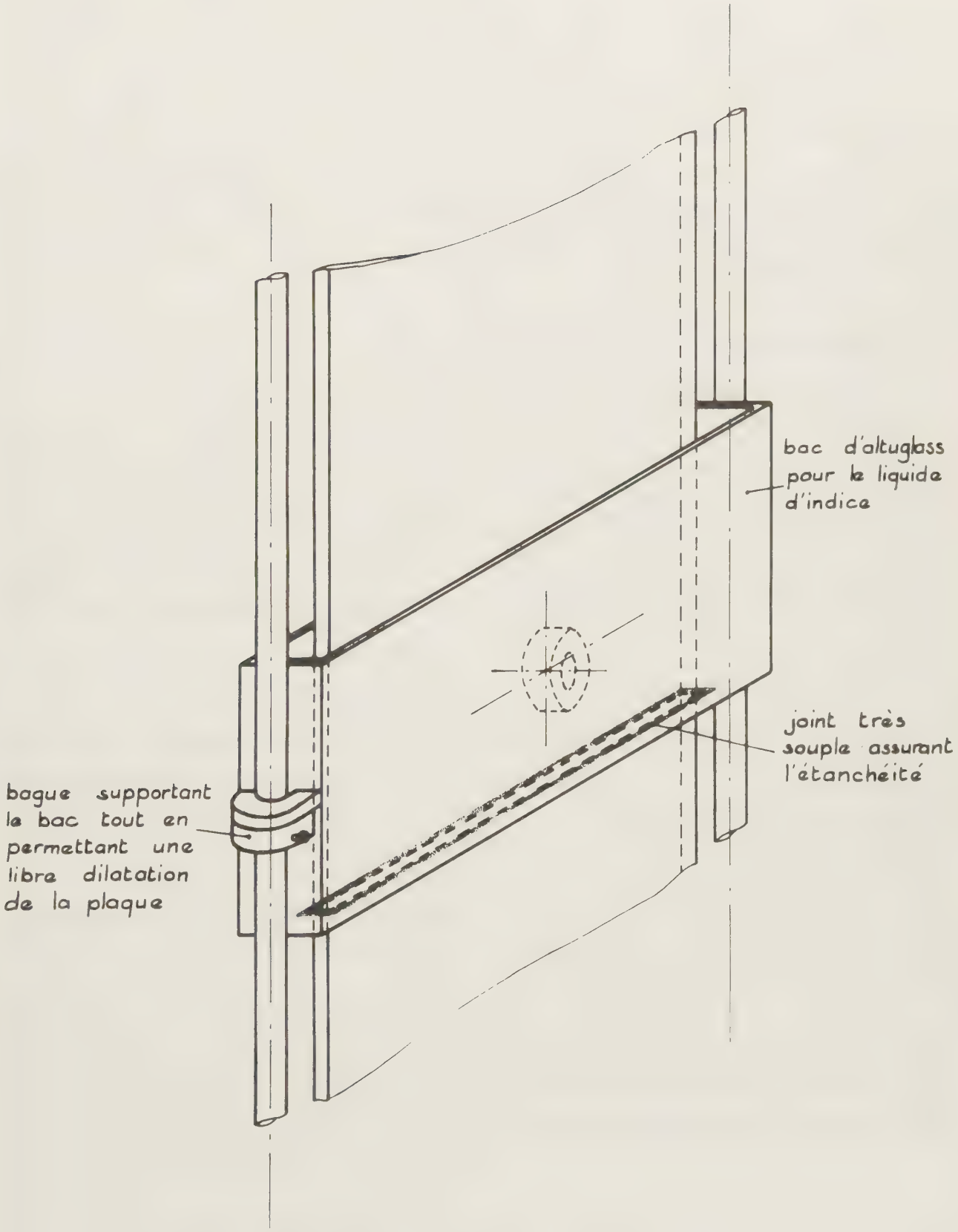


Fig.(5-6) Bac pour le liquide d'indice

Pour le modèle, comme nous le verrons plus loin, il est plus commode de travailler avec un matériau peu biréfringent. Nous avons retenu l'altuglass "M70" commercialisé par la Société Altulor car en plus d'une faible constante photoélastique (4.1 Brewster) il présente l'avantage de posséder une biréfringence initiale sinon négligeable, tout au moins très faible. Son module d'élasticité est voisin de 280 daN/mm^2 pour une résistance à la traction de 6,5 à 7,5 daN/mm^2. La limite d'allongement élastique à 20°C est en moyenne de 3 daN/mm^2. La force appliquée sur le palonnier était voisine de 250 daN, ce qui correspond à une contrainte nominale de 0,4 hb dans la plaque d'épaisseur 4 mm. Dans le cas de fortes majorations de contraintes, nous sommes restés en deçà de cette valeur afin de ne pas atteindre la limite d'allongement élastique.

5,2 - RESULTATS

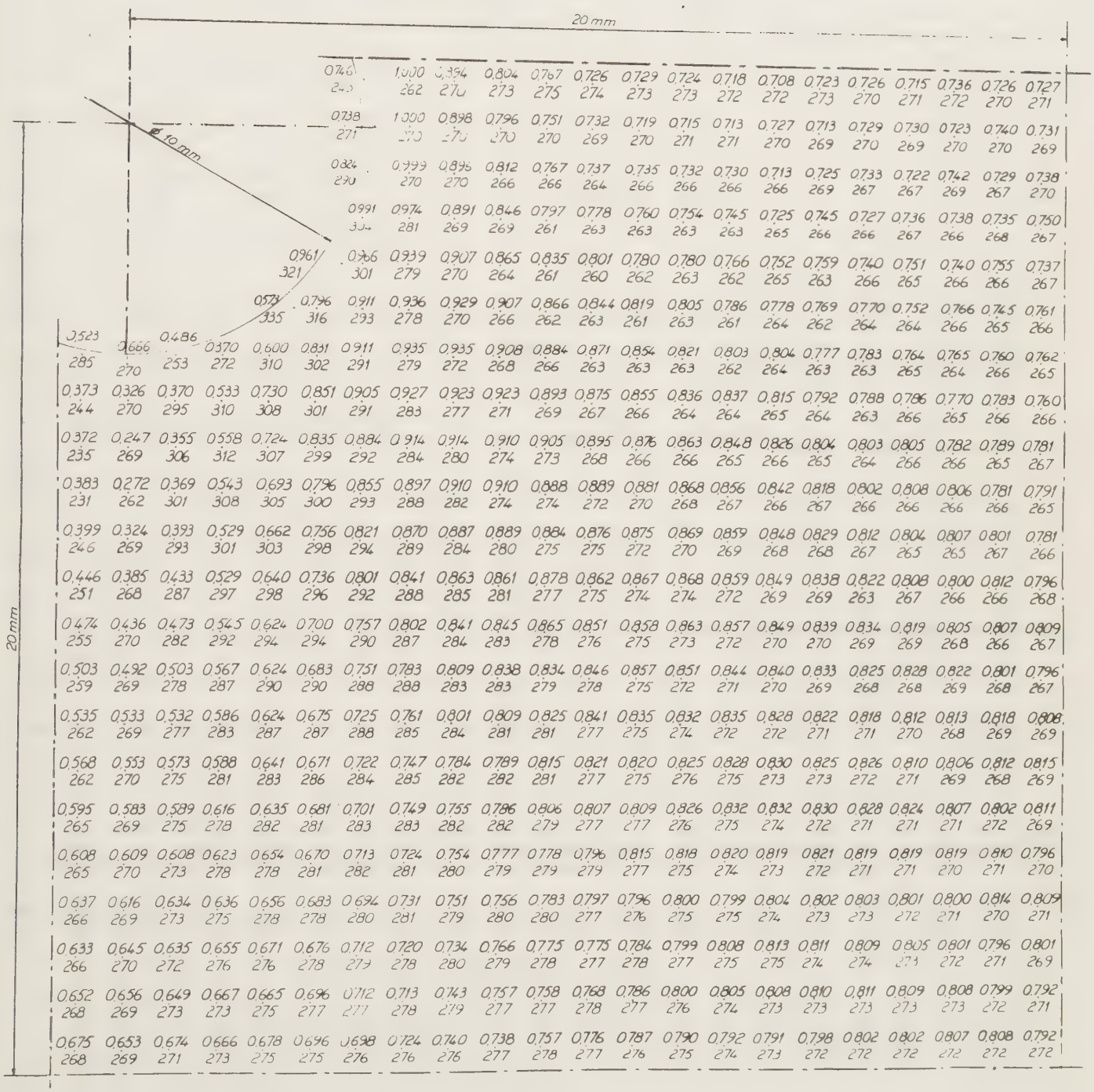
5,21 - *Plaque infinie en traction percée d'un trou circulaire*

Afin de chiffrer la précision des mesures obtenues à l'aide du photoélasticimètre bidimensionnel, nous avons étudié le cas bien connu de la plaque infinie en traction uniforme percée d'un trou circulaire. La plaque (300 x 150 x 4 mm) était percée en son centre d'un trou circulaire de diamètre 10 mm aussi, compte tenu de ces dimensions, l'approximation est acceptable. D'autre part, les résultats nous permettront d'apprécier la validité des hypothèses avancées dans l'étude théorique.

5,211 - *Mesures*

Etant donnée la symétrie du modèle et du chargement, nous nous sommes bornés à l'étude d'un quart de plaque (Fig. 5.7). Nous avons effectué nos mesures aux sommets de quadrillages constitués de lignes parallèles à OX et OY. A proximité du trou, (jusqu'à 20 mm de l'axe) nous avons réalisé un quadrillage fin avec une maille de 1 mm ; dans le reste du quart de plaque, nous avons augmenté le pas à 5 mm. Nous avons en chaque point relevé le déphasage sin ϕ et l'angle 2α du grand axe de l'ellipse de lumière avec l'horizontale. Les mesures ont été reportées sur les tableaux des Figures (5.8) et (5.9).

D'autre part, afin de déterminer avec précision le coefficient de majoration de contraintes au point A, au bord du trou, sur l'axe X (Fig. 5,7) nous avons effectué 12 mesures de sin ϕ_A et 12 mesures de sin ϕ_o, loin du trou pour déterminer la contrainte nominale dans la plaque (voir Tableau 5.10).



								0,746 / 245	1,000 / 262	0,894 / 270	0,804 / 273	0,767 / 275	0,726 / 274	0,729 / 273	0,724 / 273	0,718 / 272	0,708 / 272	0,723 / 273	0,726 / 270	0,715 / 271	0,736 / 272	0,726 / 270	0,727 / 271
								0,738 / 271	1,000 / 270	0,898 / 270	0,796 / 270	0,751 / 270	0,732 / 269	0,719 / 270	0,715 / 271	0,713 / 271	0,727 / 270	0,713 / 269	0,729 / 270	0,730 / 269	0,723 / 270	0,740 / 270	0,731 / 269
								0,824 / 290	0,999 / 270	0,896 / 270	0,812 / 266	0,767 / 266	0,737 / 264	0,735 / 266	0,732 / 266	0,730 / 266	0,713 / 266	0,725 / 269	0,733 / 267	0,722 / 267	0,742 / 269	0,729 / 267	0,738 / 270
								0,991 / 304	0,974 / 281	0,891 / 269	0,846 / 269	0,797 / 261	0,778 / 263	0,760 / 263	0,754 / 263	0,745 / 263	0,725 / 265	0,745 / 266	0,727 / 266	0,736 / 267	0,738 / 266	0,735 / 268	0,750 / 267
							0,961 / 321	0,966 / 301	0,939 / 279	0,907 / 270	0,865 / 264	0,835 / 261	0,801 / 260	0,780 / 262	0,780 / 263	0,766 / 262	0,752 / 265	0,759 / 263	0,740 / 266	0,751 / 265	0,740 / 266	0,755 / 266	0,737 / 267
						0,574 / 335	0,796 / 316	0,911 / 293	0,936 / 278	0,929 / 270	0,907 / 266	0,866 / 262	0,844 / 263	0,819 / 261	0,805 / 263	0,786 / 261	0,778 / 264	0,769 / 262	0,770 / 264	0,752 / 264	0,766 / 266	0,745 / 265	0,761 / 266
0,523 / 285	0,666 / 270	0,486 / 253	0,370 / 272	0,600 / 310	0,831 / 302	0,911 / 291	0,935 / 279	0,935 / 272	0,908 / 268	0,884 / 266	0,871 / 263	0,854 / 263	0,821 / 263	0,803 / 262	0,804 / 264	0,777 / 263	0,783 / 263	0,764 / 265	0,765 / 264	0,760 / 266	0,762 / 265	
0,373 / 244	0,326 / 270	0,370 / 295	0,533 / 310	0,730 / 308	0,851 / 301	0,905 / 291	0,927 / 283	0,923 / 277	0,923 / 271	0,893 / 269	0,875 / 267	0,855 / 266	0,836 / 264	0,837 / 264	0,815 / 265	0,792 / 264	0,788 / 263	0,786 / 266	0,770 / 265	0,783 / 266	0,760 / 266	
0,372 / 235	0,247 / 269	0,355 / 306	0,558 / 312	0,724 / 307	0,835 / 299	0,884 / 292	0,914 / 284	0,914 / 280	0,910 / 274	0,905 / 273	0,895 / 268	0,876 / 266	0,863 / 266	0,848 / 265	0,826 / 266	0,804 / 265	0,803 / 264	0,805 / 266	0,782 / 266	0,789 / 265	0,781 / 267	
0,383 / 231	0,272 / 262	0,369 / 301	0,543 / 308	0,693 / 305	0,796 / 300	0,855 / 293	0,897 / 288	0,910 / 282	0,910 / 274	0,888 / 274	0,889 / 272	0,881 / 270	0,868 / 268	0,856 / 267	0,842 / 266	0,818 / 267	0,802 / 266	0,808 / 266	0,806 / 266	0,781 / 266	0,791 / 265	
0,399 / 246	0,324 / 269	0,393 / 293	0,529 / 301	0,662 / 303	0,756 / 298	0,821 / 294	0,870 / 289	0,887 / 284	0,889 / 280	0,884 / 275	0,876 / 275	0,875 / 272	0,869 / 270	0,859 / 269	0,848 / 268	0,829 / 268	0,812 / 267	0,804 / 265	0,807 / 265	0,801 / 267	0,781 / 266	
0,446 / 251	0,385 / 268	0,433 / 287	0,529 / 297	0,640 / 298	0,736 / 296	0,801 / 292	0,841 / 288	0,863 / 285	0,861 / 281	0,878 / 277	0,862 / 275	0,867 / 274	0,868 / 274	0,859 / 272	0,849 / 269	0,838 / 269	0,822 / 263	0,808 / 267	0,800 / 266	0,812 / 266	0,796 / 268	
0,474 / 255	0,436 / 270	0,473 / 282	0,545 / 292	0,624 / 294	0,700 / 294	0,757 / 290	0,802 / 287	0,841 / 284	0,845 / 283	0,865 / 278	0,851 / 276	0,858 / 275	0,863 / 273	0,857 / 272	0,849 / 270	0,839 / 270	0,834 / 269	0,819 / 269	0,805 / 268	0,807 / 266	0,809 / 267	
0,503 / 259	0,492 / 269	0,503 / 278	0,567 / 287	0,624 / 290	0,683 / 290	0,751 / 288	0,783 / 288	0,809 / 283	0,838 / 283	0,834 / 279	0,846 / 278	0,857 / 275	0,851 / 272	0,844 / 271	0,840 / 270	0,833 / 269	0,825 / 268	0,828 / 268	0,822 / 269	0,801 / 268	0,796 / 267	
0,535 / 262	0,533 / 269	0,532 / 277	0,586 / 283	0,624 / 287	0,675 / 287	0,725 / 288	0,761 / 285	0,801 / 284	0,809 / 281	0,825 / 281	0,841 / 277	0,835 / 275	0,832 / 274	0,835 / 272	0,828 / 272	0,822 / 271	0,818 / 271	0,812 / 270	0,813 / 268	0,818 / 269	0,808 / 269	
0,568 / 262	0,553 / 270	0,573 / 275	0,588 / 281	0,641 / 283	0,671 / 286	0,722 / 284	0,747 / 285	0,784 / 282	0,789 / 282	0,815 / 281	0,821 / 277	0,820 / 275	0,825 / 276	0,828 / 275	0,830 / 273	0,825 / 273	0,826 / 272	0,810 / 271	0,806 / 269	0,812 / 268	0,815 / 269	
0,595 / 265	0,583 / 269	0,589 / 275	0,616 / 278	0,635 / 282	0,681 / 281	0,701 / 283	0,749 / 283	0,755 / 282	0,786 / 282	0,806 / 279	0,807 / 277	0,809 / 277	0,826 / 276	0,832 / 275	0,832 / 274	0,830 / 272	0,828 / 271	0,824 / 271	0,807 / 271	0,802 / 272	0,811 / 269	
0,608 / 265	0,609 / 270	0,608 / 273	0,623 / 278	0,654 / 278	0,670 / 281	0,713 / 282	0,724 / 281	0,754 / 280	0,777 / 279	0,778 / 279	0,796 / 279	0,815 / 277	0,818 / 275	0,820 / 274	0,819 / 273	0,821 / 272	0,819 / 271	0,819 / 271	0,819 / 270	0,810 / 271	0,796 / 270	
0,637 / 266	0,616 / 269	0,634 / 273	0,636 / 275	0,656 / 278	0,683 / 278	0,694 / 280	0,731 / 281	0,751 / 279	0,756 / 280	0,783 / 280	0,797 / 277	0,796 / 276	0,800 / 275	0,799 / 275	0,804 / 274	0,802 / 273	0,803 / 273	0,801 / 272	0,800 / 271	0,814 / 270	0,809 / 271	
0,633 / 266	0,645 / 270	0,635 / 272	0,655 / 276	0,671 / 276	0,676 / 278	0,712 / 279	0,720 / 278	0,734 / 280	0,766 / 279	0,775 / 278	0,775 / 277	0,784 / 278	0,799 / 277	0,808 / 275	0,813 / 275	0,811 / 274	0,809 / 274	0,805 / 273	0,801 / 272	0,796 / 271	0,801 / 269	
0,652 / 268	0,656 / 269	0,649 / 273	0,667 / 273	0,665 / 275	0,696 / 277	0,712 / 277	0,713 / 278	0,743 / 279	0,757 / 277	0,758 / 277	0,768 / 278	0,786 / 277	0,800 / 276	0,805 / 274	0,808 / 273	0,810 / 273	0,811 / 273	0,809 / 273	0,808 / 273	0,799 / 272	0,792 / 271	
0,675 / 268	0,653 / 269	0,674 / 271	0,666 / 273	0,678 / 275	0,696 / 275	0,698 / 276	0,724 / 276	0,740 / 276	0,738 / 277	0,757 / 278	0,776 / 277	0,787 / 276	0,790 / 275	0,792 / 274	0,791 / 273	0,798 / 272	0,802 / 272	0,802 / 272	0,807 / 272	0,808 / 272	0,792 / 272	

fig 5,8 - Relevé des mesures de sin φ et de 2α au bord du trou (pas 1m) de la plaque en traction (verticale)

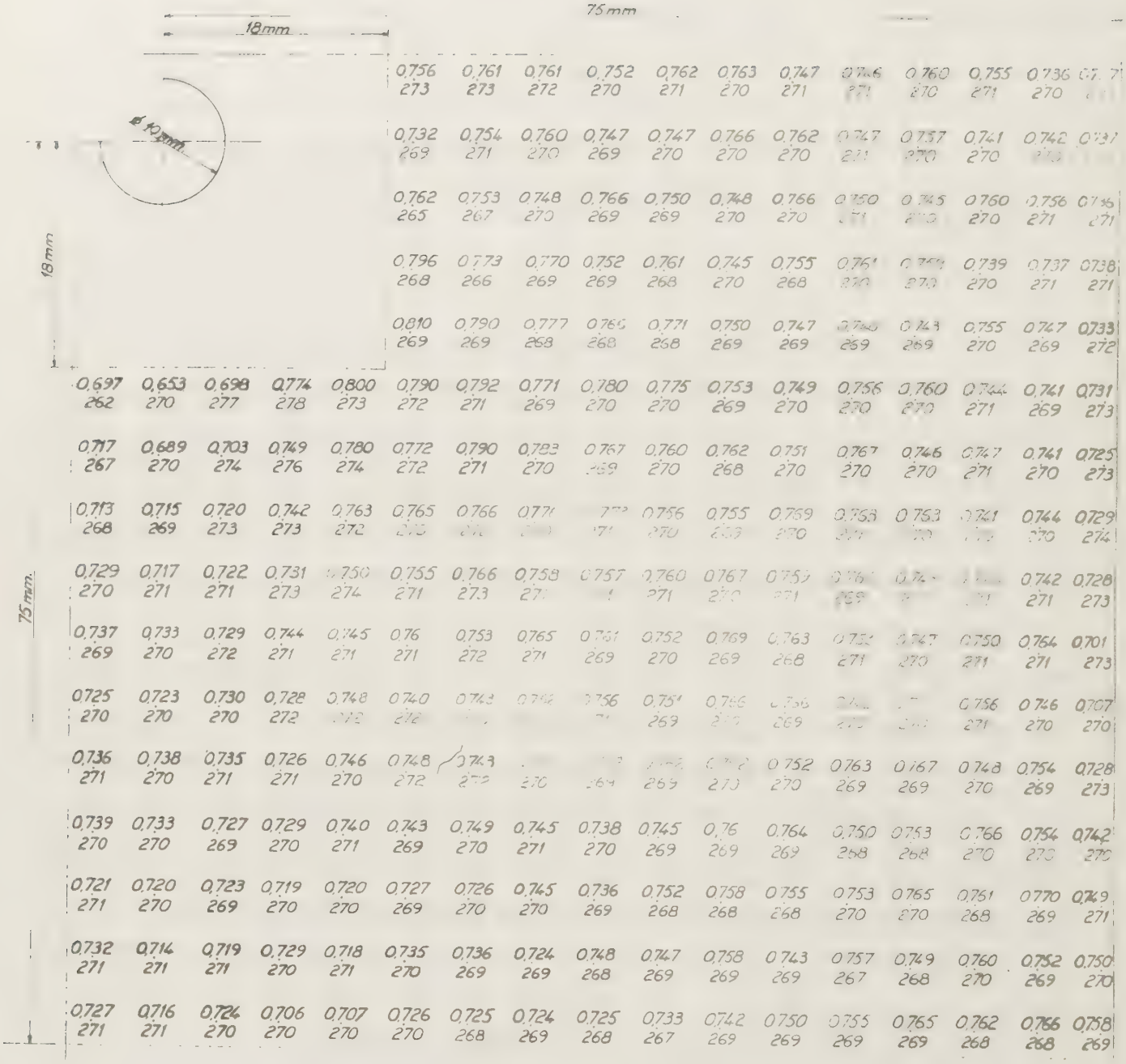


Fig. 5,9 - Relevé des mesures de sin φ et de 2α sur plaque en traction verticale (pas 5mm)

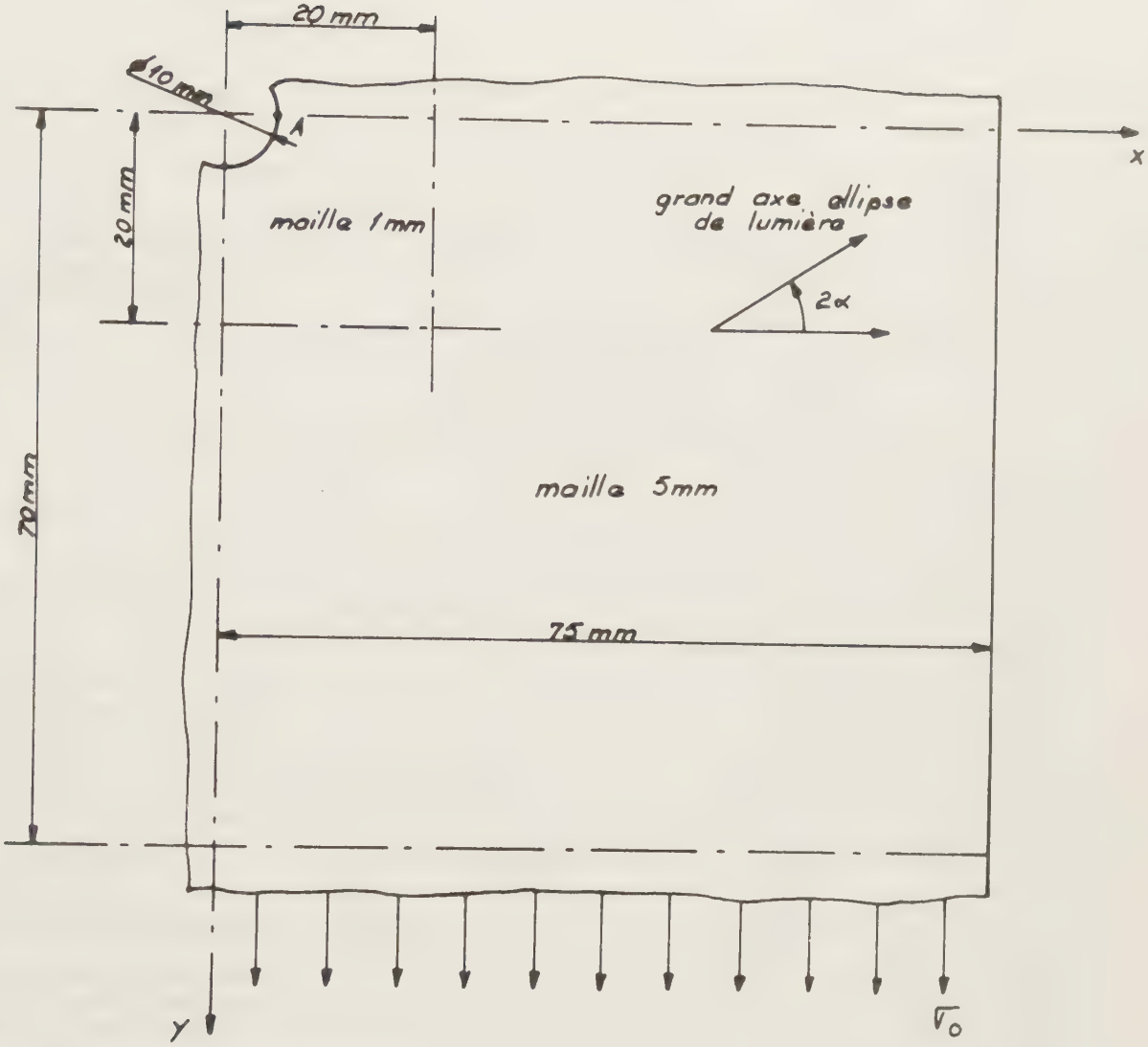


Fig. (5.7) - Portion de la plaque étudiée

Ceci nous a donné les valeurs moyennes suivantes :
$\bar{\phi}_A$ = 133°6 et $\bar{\phi}_o$ = 46°4 auxquelles correspond le coefficient de majoration de contraintes en A : k_A = 2,88.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
sin. φ_A	0,735	0,725	0,726	0,727	0,715	0,729	0,733	0,716	0,726	0,725	0,732	0,726
φ_A°	132,7	133,5	133,4	133,4	134,4	133,2	132,9	134,3	133,4	133,5	132,9	133,4
sin. φ_o	0,733	0,726	0,732	0,711	0,711	0,725	0,725	0,732	0,730	0,710	0,727	0,723
φ_o°	47,1	46,6	47,1	45,3	45,3	46,5	46,5	47,1	46,9	45,2	46,6	46,3

5.10 - Valeurs expérimentales

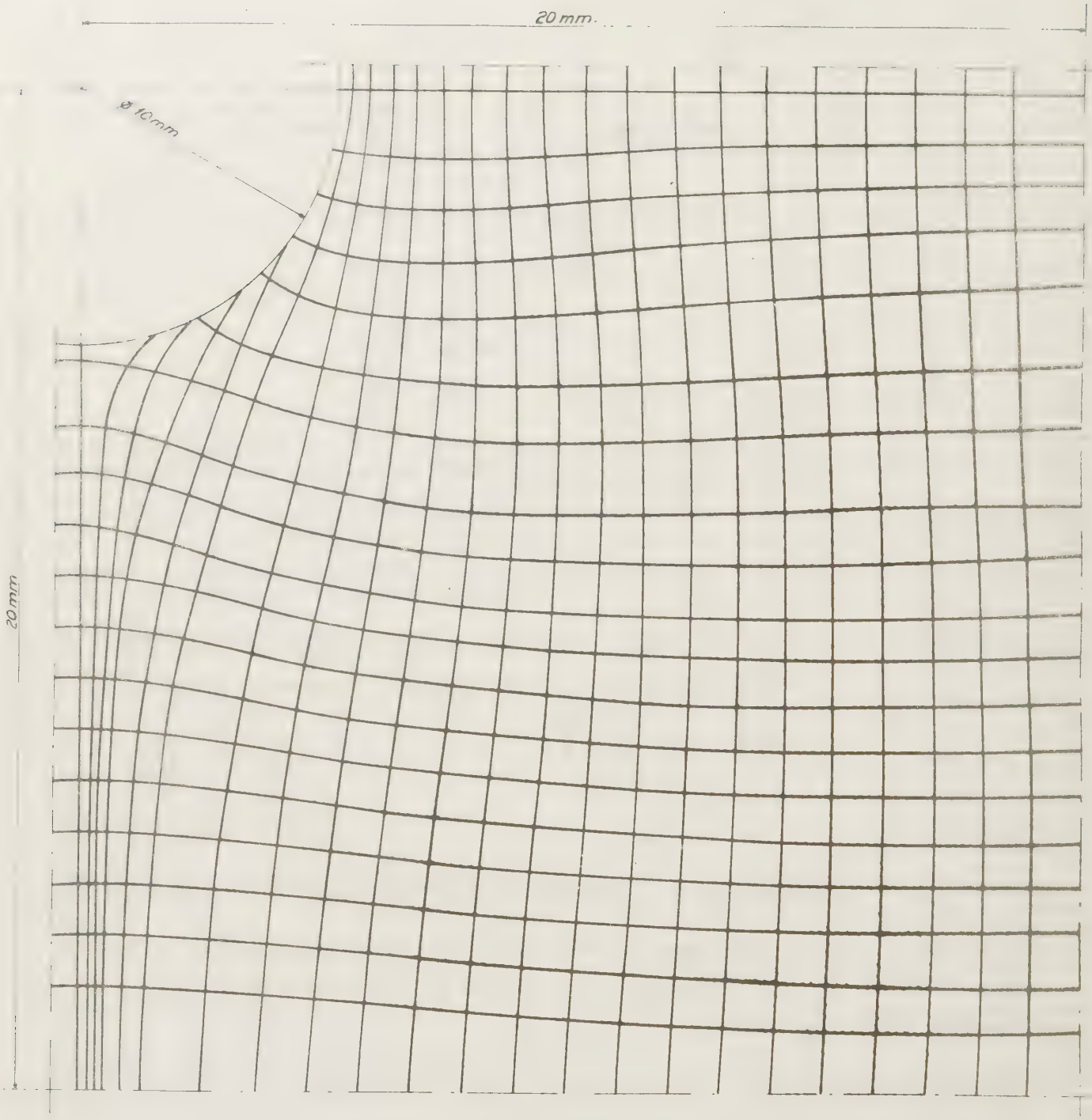


Fig. 5.11 _ Tracé des isostatiques dans 1/4 de plaque en traction verticale

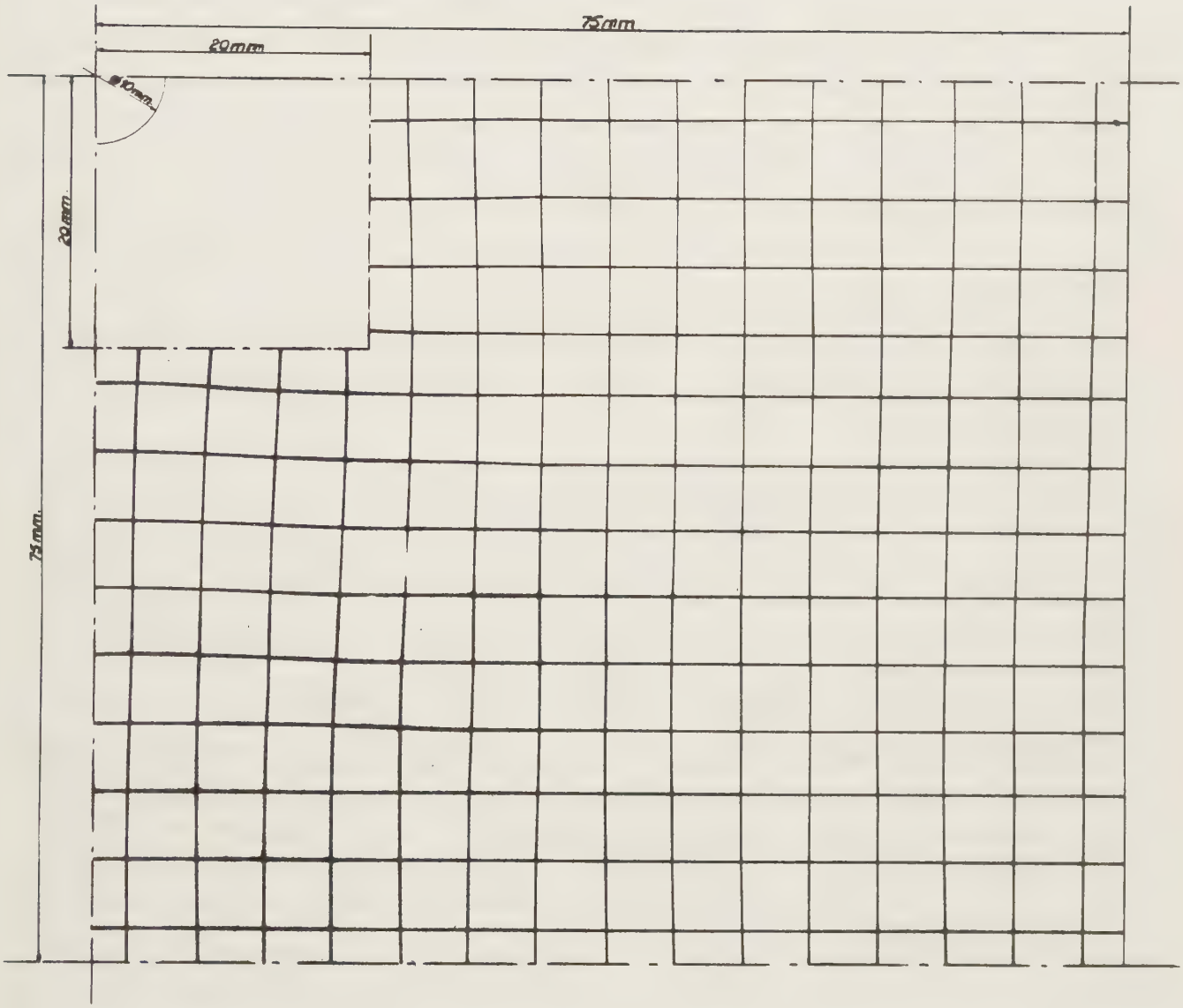


Fig. 5.12 - Tracé des isostatiques dans 1/4 de plaque en traction verticale

5,212 - *Séparation des contraintes principales - Isostatiques*

A l'aide de la méthode de séparation des contraintes figurant en appendice, nous avons obtenu les contraintes principales en chaque point de mesure. Le calcul a été effectué à partir du bord extérieur de la plaque vers son centre et selon des parallèles à l'axe X. Cela nous a permis de vérifier que loin du trou, nous étions bien en présence d'une traction uniformément répartie, parallèle à la direction Y. Ce résultat se retrouve sur les figures (5.11) et (5.12) où nous avons tracé les isostatiques. Nous remarquons que la zone d'influence du trou est très limitée ; pratiquement, l'état de contraintes de base de la plaque n'est pas modifié à une distance du centre égale à deux fois le diamètre du trou.

En poursuivant la séparation des contraintes principales jusqu'au bord du trou, nous avons obtenu les valeurs $\sigma_x = -0,227$ et $\sigma_y = 3,482$ au point A de la Fig. 5,7, pour une contrainte nominale de traction $\sigma_o = 1$ dans la plaque alors que théoriquement, en ce point, les contraintes principales sont $\sigma_x = 0$ et $\sigma_y = 3,00$.

5,213 - *Précision des résultats*

Les 12 mesures de la contrainte en A et de la contrainte nominale dans la plaque permettent de chiffrer statistiquement l'erreur commise. En effet, supposons une distribution de Gauss des résultats ; la probabilité pour que l'erreur relative soit inférieure à $\frac{ts\bar{k}}{\bar{k}}$ est F(t) avec $s\bar{k} = \sqrt{\frac{\Sigma_i (k_i - \bar{k})^2}{n(n-1)}}$, $\bar{k}$ étant la moyenne arithmétique des n mesures. La relation entre la probabilité F(t) et t est donnée par la loi de Student-Fisher. Pour avoir une probabilité de 95 %, la table donne t = 2,201 avec 11 degrés de liberté.

Ainsi, nous avons une probabilité de 95 % pour que l'erreur relative soit inférieure à :

- $3,13.10^{-3}$ sur la valeur de la contrainte en A
- $9,06.10^{-3}$ sur la valeur de la contrainte nominale.

Au total, nous avons une probabilité de 95 % pour que l'erreur relative sur le coefficient de majoration de contraintes k_A soit inférieure à 1,2 %.

Si nous rapprochons ce résultat de la valeur moyenne : $\bar{k}_A = 2,879$, nous trouvons un intervalle $2,844 < k_A < 2,913$ de confiance qui ne contient pas la valeur théorique 3. Ceci est dû en partie au fait qu'il n'est pas possible de faire de mesure à moins de 0,3 mm des bords du modèle sans prendre de précautions particulières.Sinon, il y a diffraction du pinceau lumineux sur le bord de la pièce qui rend toute mesure impossible. Néanmoins, nous pensons qu'il

est possible de descendre au-dessous de cette limite dans certains cas particuliers, notamment, lorsque le bord est net, bien poli et surtout plongé dans un liquide de même indice. En révanche, nous nous heurtons à une nouvelle difficulté pour repérer le bord du modèle. Les mesures précédentes de la contrainte en A ont été l'objet de ces précautions et dans ce cas particulier, nous avons pu faire des mesures à moins de 0,2 mm du bord du trou. En tenant compte du fait que la mesure ne peut être effectuée juste sur le bord théorique du trou, les résultats expérimentaux vérifient exactement la théorie. En effet, d'après les relations (21.1) à 0,1 mm du bord du trou, sur l'axe X, les contraintes ont pour valeurs (p = 1) .

$$\sigma_r = \frac{p}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{p}{2}\left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta \qquad \sigma_r = 0{,}056$$

$$\sigma_\theta = \frac{p}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{p}{2}\left(1 + 3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \qquad \sigma_\theta = 2{,}922$$

Ainsi, en théorie, la différence des contraintes principales à 0,1 mm de A sur l'axe des X est de 2,866, valeur comprise dans la fourchette donnée précédemment. Ce résultat explique le fait que nous n' ayons pas trouvé un coefficient de majoration de contraintes de 3 au bord du trou. Nous avons fait notre mesure, non pas au point théorique A mais à une distance de l'ordre de 0,1 mm du bord du trou.

Il y a un autre argument qui peut justifier l'écart entre la théorie et les résultats expérimentaux : dans les caractéristiques de l'appareil, nous avons indiqué que le diamètre de la tache lumineuse tombant sur le modèle était de l'ordre de quelques centième de millimètres. La mesure fournie par le photoélasticimètre est donc la moyenne sur cette zone. Cette valeur diffère peu de la valeur ponctuelle dans une zone à faible gradient de contraintes mais ce n'est pas le cas au point A étudié. Il est possible de donner l'ordre de grandeur de l'erreur ainsi commise dans notre mesure en se reportant à la relation (3) du paragraphe (3) :

$$K = \frac{2}{1 + \frac{e}{R}(1 + \nu)}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{1 + \frac{2}{\frac{R}{e} + (1 + \nu)}}\right)$$

où K est le coefficient de majoration de la contrainte moyenne dans la zone de largeur e à partir du bord d'un trou circulaire de rayon R dans une plaque infinie en traction monoaxée. Admettons que la tache du pinceau lumineux tombant sur le modèle ait un diamètre de 0,05 mm (valeur moyenne donnée par le constructeur), ce qui correspond à $\frac{e}{R} = 0{,}01$. La valeur théorique, dans ces conditions, au voisinage de A est 2,92 au lieu de 3. L'erreur qui en découle est de l'ordre de 2,6 %.

De ces premières mesures, il ressort que l'appareil de mesure est très fidèle puisque la probabilité pour avoir une précision inférieure à 1,2 % est de 95 %. Néanmoins, nous pensons que ceci représente la limite des possibilités de l'appareil dans un cas particulier où les conditions expérimentales les plus favorables avaient été réunies. Il convient de noter qu'au voisinage du point A, le gradient de contraintes est très important en raison du faible diamètre (10 mm) du trou. La précision augmenterait avec le diamètre mais nous étions limités, d'une part, en raison des capacités de l'appareillage et d'autre part, nous voulions nous rapprocher le plus possible de la plaque infinie.

L'utilisation des mesures des figures (5.8) et (5.9) pour la séparation des contraintes à l'intérieur du modèle ne nous a pas donné une précision aussi satisfaisante. En prenant comme point de départ le bord extérieur du modèle et en séparant les contraintes selon la direction X, nous avons trouvé 3,482 pour σ_θ au point A, ce qui constitue, par rapport à la théorie une erreur voisine de 16 %. Du bord du modèle au point, nous avons 27 mailles. Comme les calculs reprennent le résultat obtenu au point précédent pour calculer les contraintes au point suivant, il est normal que les erreurs s'accumulent. Mais dans la méthode de séparation des contraintes, en plus du déphasage, nous avons besoin de la mesure de 2α pour calculer les τ_i^j. Or la mesure de 2α est plus imprécise et moins fidèle que celle de sin ϕ. Alors que le voltmètre digital indique le degré, il ne nous semble pas possible de faire une mesure à moins de deux degrés près. De plus, le cas étudié est des plus défavorables pour appliquer la méthode de séparation des contraintes. En effet, dans notre cas, 2η était voisin de 180°, ce qui correspond à un maximum pour les erreurs sur sin 2η et en séparant les contraintes selon l'axe X, nous calculions des valeurs quasiment nulles qui étaient ensuite utilisées pour calculer les contraintes normales selon la direction Y. Enfin dans le but d'obtenir une bonne précision, nous avions pris un pas relativement faible, surtout au bord du trou car plus le pas est faible et plus la théorie des différences finies est précise mais inversement plus le nombre d'itérations est important et plus les causes d'erreurs sont grandes. En résumé, la méthode de séparation des contraintes ne donne des résultats très satisfaisants que si le gradient des contraintes est faible et le nombre de sommets où on l'applique restreint.

5,22 - *Plaques de largeur finie en traction percées d'un trou circulaire*

5,221 - *Variation du coefficient de majoration de contraintes au bord du trou en fonction de* $\lambda = \frac{a}{b}$, *rapport du diamètre du trou à la largeur de la plaque.*

Après le cas de la plaque infinie, nous avons étudié l'évolution du coefficient de majoration de contraintes au bord du trou pour des plaques de largeur finie. La variation de λ a été obtenue en faisant varier le diamètre 2a

λ \ θ		0	15	30	45	60	75	90
0,15	k	3,15	2,84	2,04	1,00	-0,017	-0,70	-0,95
	km	2,68	2,41	1,73	0,85	-0,014	-0,59	-0,81
0,20	k	3,22	2,98	2,19	1,03	-0,13	-0,72	-0,97
	km	2,58	2,38	1,75	0,82	-0,104	-0,58	-0,78
0,30	k	3,60	3,14	2,24	1,00	-0,11	-0,85	-1,12
	km	2,52	2,20	1,57	0,70	-0,077	-0,59	-0,78
0,333	k	3,65	3,24	2,27	1,04	-0,16	-0,95	-1,22
	km	2,43	2,16	1,51	0,69	-0,11	-0,63	-0,81
0,376	k	3,82	3,30	2,28	0,97	-0,17	-0,90	-1,19
	km	2,38	2,06	1,42	0,60	-0,11	-0,56	-0,74
0,40	k	3,99	3,52	2,38	0,92	-0,29	-1,06	-1,35
	km	2,39	2,11	1,43	0,55	-0,17	-0,64	-0,81
0,50	k	4,55	3,91	2,42	0,84	-0,49	-1,23	-1,50
	km	2,28	1,96	1,21	0,42	-0,25	-0,62	-0,75
0,60	k	5,63	4,59	2,41	0,49	-0,85	-1,45	-1,61
	km	2,25	1,84	0,97	0,20	-0,34	-0,58	-0,64
0,666	k	6,27	5,23	2,41	0,15	-1,06	-1,57	-1,76
	km	2,26	1,75	0,80	0,05	-0,35	-0,52	-0,59
0,75	k	9,19	6,53	2,42	-0,46	-1,49	-1,84	-1,92
	km	2,30	1,63	0,60	-0,11	-0,37	-0,46	-0,48
0,80	k	11,55	7,25	2,40	-1,04	-1,78	-1,93	-1,95
	km	2,31	1,45	0,48	-0,21	-0,36	-0,39	-0,39

$$k = \frac{\varphi}{\varphi_0}$$

$$km = \frac{\varphi}{\varphi_0}(1-\lambda)$$

$$\lambda = \frac{a}{b}$$

φ biréfringence au bord du trou

φ_0 biréfringence nominale dans la plaque

Fig.(5-14) Majorations de contraintes au bord d'un trou circulaire dans une plaque de largeur finie en traction uniforme

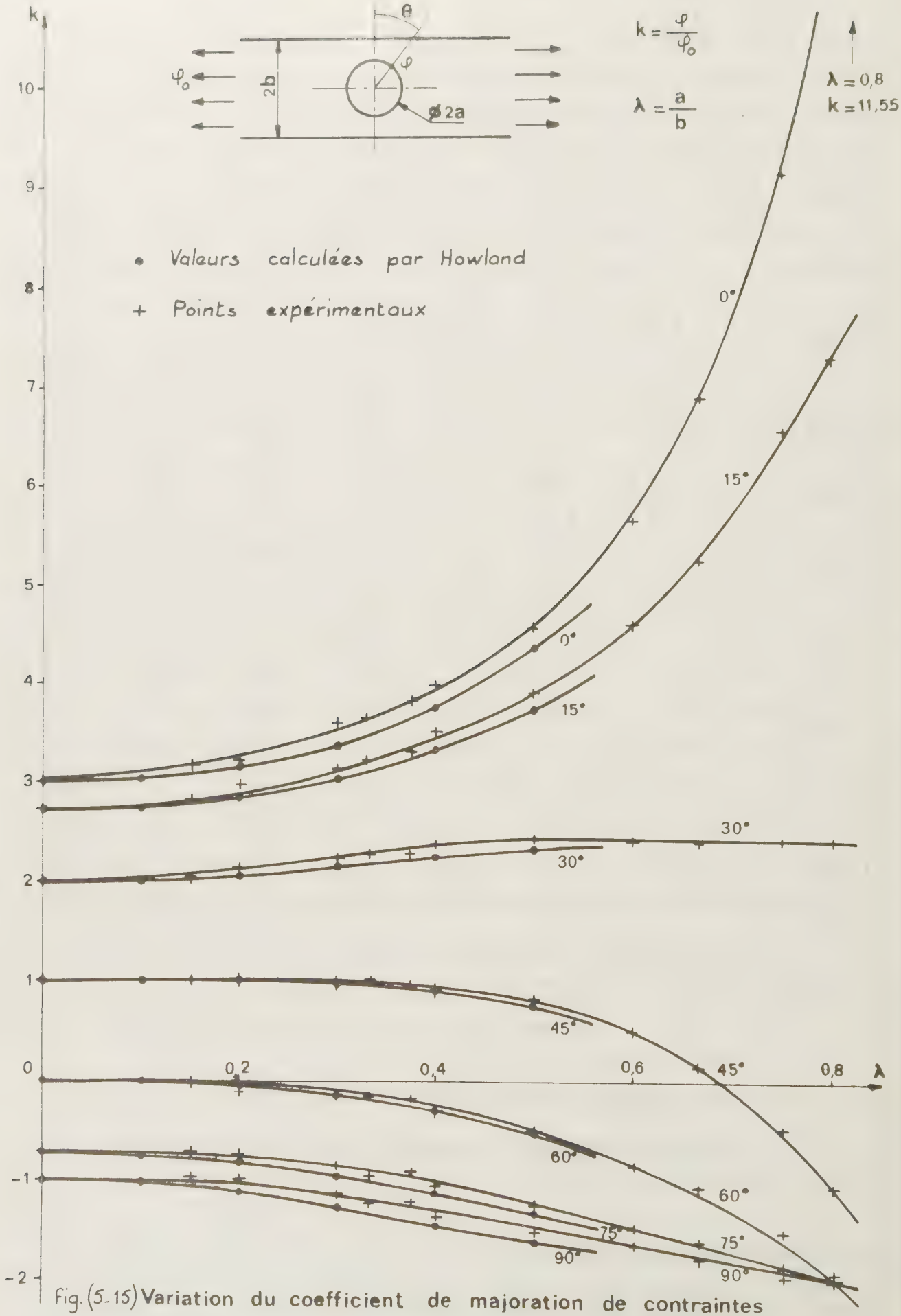


Fig. (5-15) Variation du coefficient de majoration de contraintes au bord du trou

du trou, la largeur des plaques d'altuglass étant constante et égale à 150 mm pour une épaisseur de 4 mm (Fig. 5.13). Nous avons retenu les valeurs suivantes : 2a = 22,5 ; 30 ; 45 ; 50 ; 56,5 ; 60 ; 75 ; 90 ; 100 ; et 112,5 mm. Le dispositif de chargement était ainsi le même que pour la plaque précédente (Fig. 5.5.).

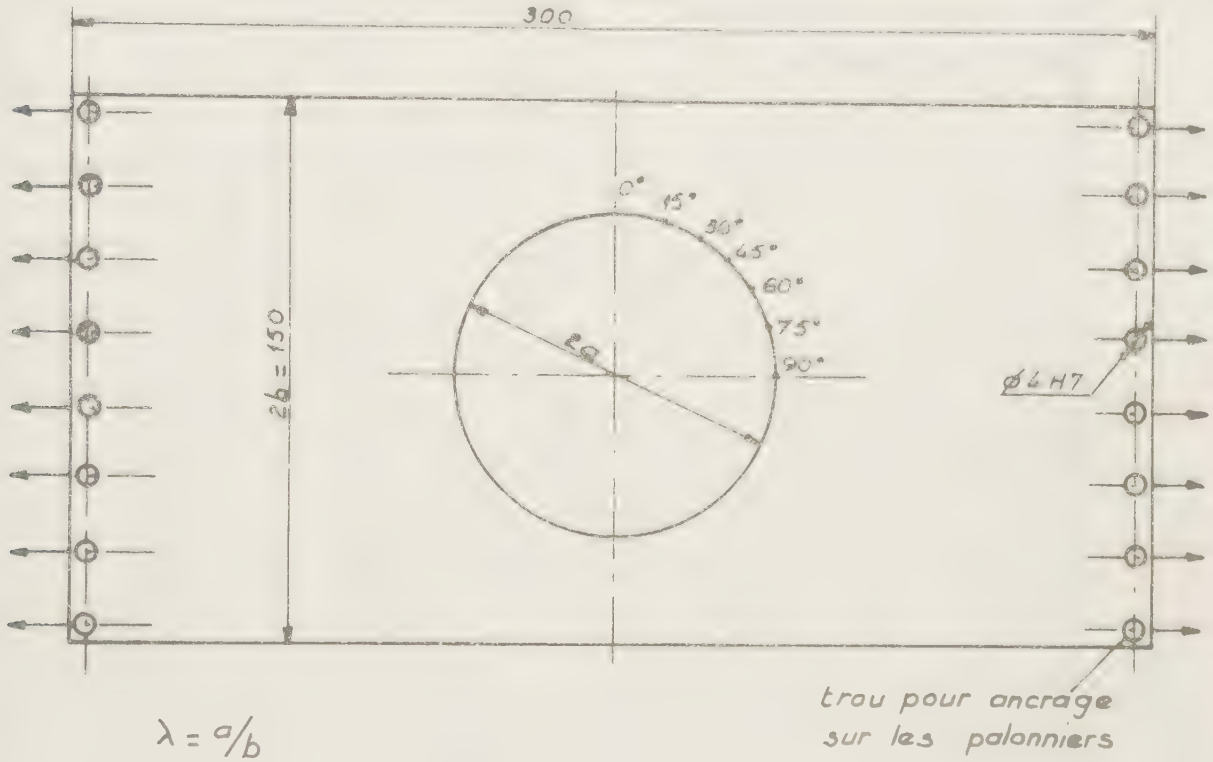


Fig. 5,13 - Plaque d'altuglass, épaisseur 4 mm.

Pour chaque plaque, la traction nominale appliquée a été choisie de telle façon que :

- au point de plus forte majoration de contraintes, celles-ci n'excèdent pas 1,2 hb.
- les biréfringences mesurées ne soient pas voisines de $\frac{\pi}{2}$ ou de $\frac{3\pi}{2}$.

Pour certaines plaques, il a été nécessaire de faire les mesures dans un liquide d'indice (huile de vaseline plus phénochlore) pour éliminer les réfractions sur le bord du trou. Pour chaque plaque de paramètre λ, nous avons relevé le sin ϕ en sept points sur un quart de cercle de 15° en 15° à partir de l'extrêmité du diamètre perpendiculaire à la direction de la traction. Le coefficient de majoration de contraintes k est le rapport entre la biréfringence au point considéré (ϕ) et la biréfringence nominale (ϕ_o) dans la plaque. Les résultats ainsi obtenus ont été portés dans le Tableau (5.14) et sur le graphique (5.15).

Au lieu du coefficient de majoration de contraintes par rapport à la contrainte nominale dans la plaque, il est intéressant de calculer le

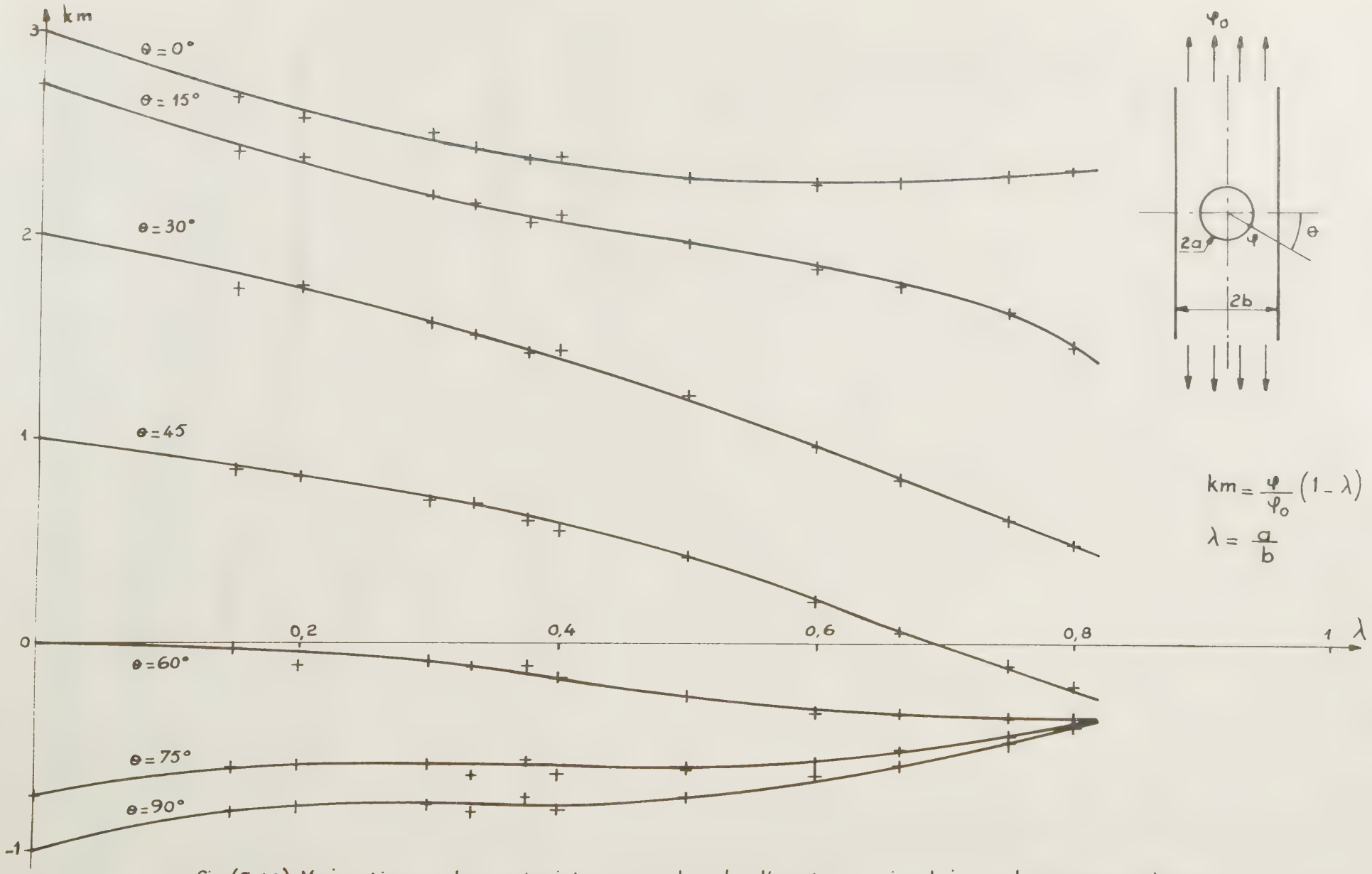
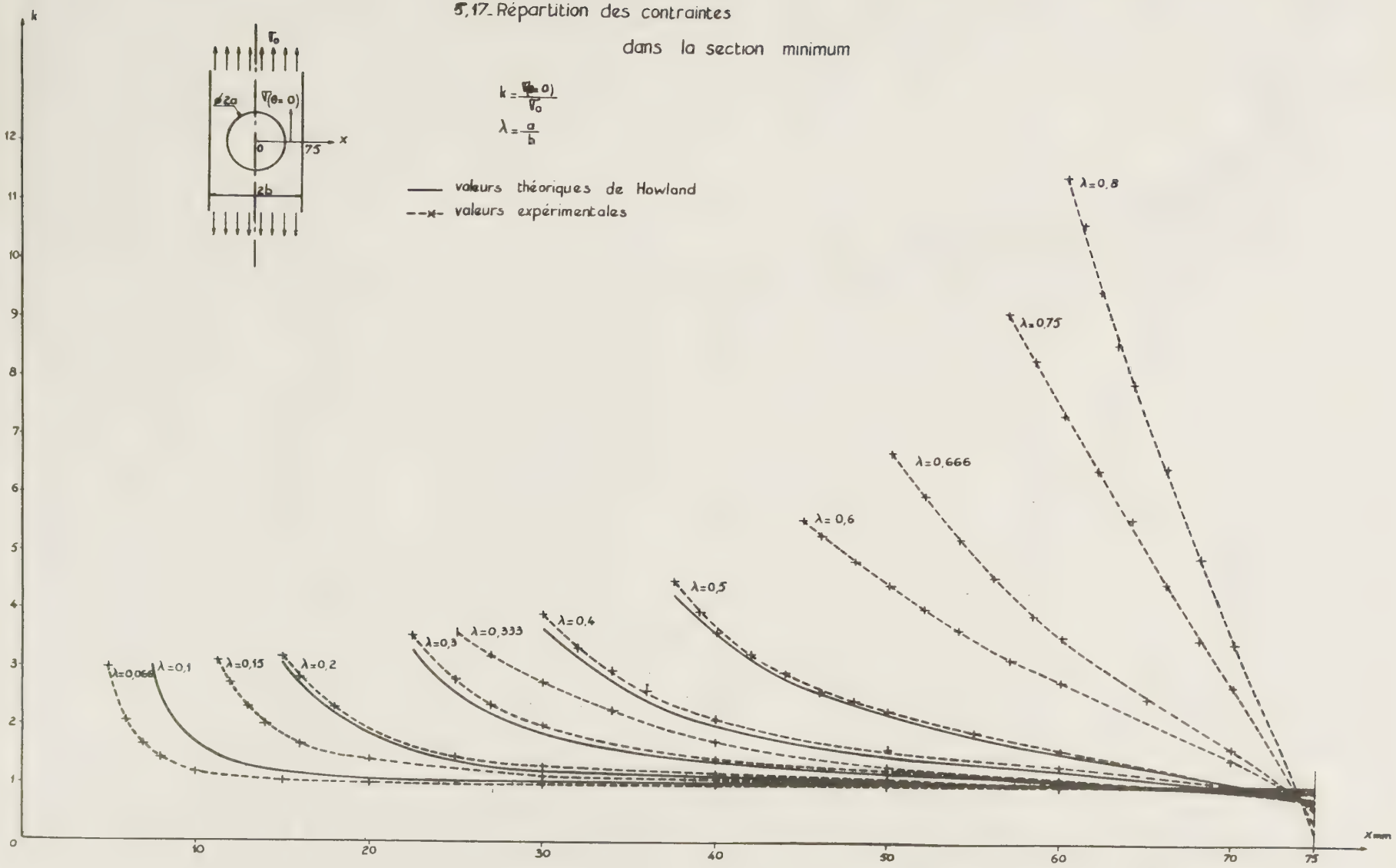


Fig.(5_16) Majorations de contraintes au bord d'un trou circulaire dans une plaque de largeur finie en traction uniforme

5,17. Répartition des contraintes dans la section minimum



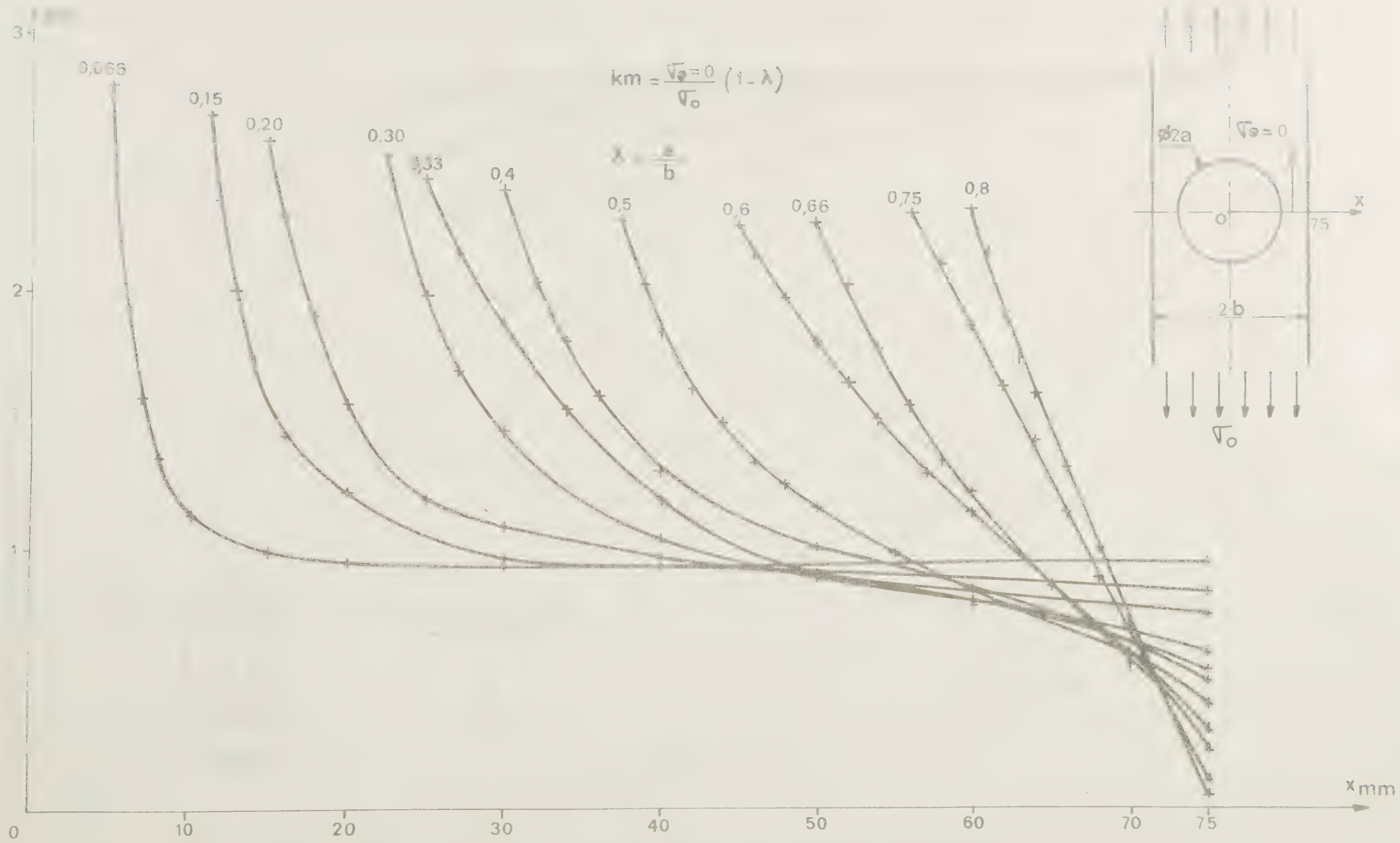


Fig (5.18) Répartition des contraintes dans la section minimum

coefficient de majoration (km) par rapport à la contrainte moyenne dans la section minimum de la plaque (σm). Celle-ci se déduit de la contrainte nominale dans le rapport des sections d'où $km = \frac{\phi}{\phi_o}(1-\lambda)$. Les résultats portés dans le tableau (5.14) et sur le graphique (5.16) montrent les variations de ce coefficient en fonction de λ. On peut remarquer qu'au point $\theta = 0$, le coefficient de majoration de contraintes km décroît rapidement et lorsque λ est supérieur à 0,35, il reste sensiblement constant et égal à 2,35 à ± 5 % près. Ce résultat peut être d'autant plus utile qu'il s'applique au point de plus forte majoration de contraintes ; il permet de donner très rapidement la valeur maximum du coefficient de majoration de contraintes à 5 % près dans une plaque de largeur finie sollicitée en traction uniforme et percée d'un trou circulaire.

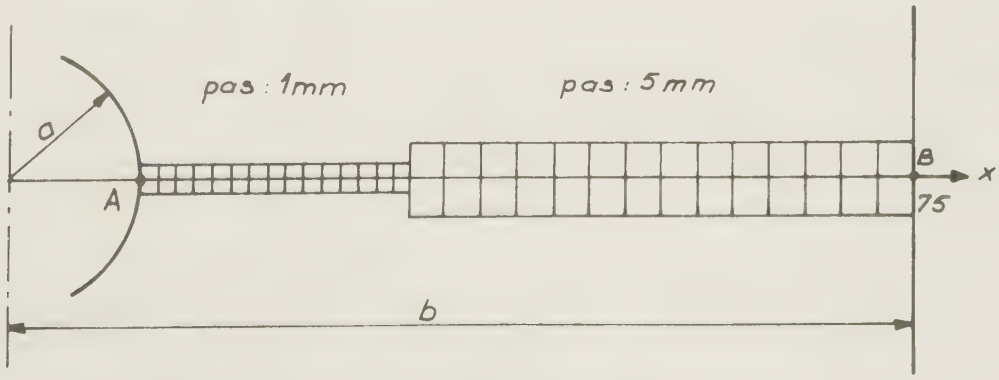
5,222 - *Répartition des contraintes dans la section minimum*

Pour les mêmes plaques que précédemment, nous avons étudié la variation du coefficient de majoration de contraintes dans la section minimum lorsque l'on s'éloigne du bord du trou. Ce coefficient peut être calculé de deux manières différentes à partir de la contrainte principale ϕ_1 :

- Soit par rapport à la contrainte nominale dans la plaque en traction uniforme : $k = \frac{\phi_1}{\phi_o}$

- Soit par rapport à la contrainte moyenne dans la section minimum $km = \frac{\phi_1}{\phi_o}(1-\lambda)$

Sur les graphiques (5.17) et (5.18), nous avons porté la valeur de la contrainte maximum qui est parallèle à la direction de la traction, l'autre contrainte, nulle au bord du trou et au bord de la plaque, restant faible. Les valeurs ont été obtenues à l'aide de la méthode de séparation des contraintes, déjà utilisée, à partir des valeurs de 2α et de $\sin\phi$ aux sommets d'un quadrillage tracé sur une bande contenant la section minimum (Fig. 5.19).



5.19 - Coordonnées des points de mesure

Au bord du trou où le gradient de contraintes est important, nous avons retenu un pas de 1 mm pour le quadrillage. Dans le reste de la section,

$\varphi°$	0	15	30	45	60	75	
$\Delta\varphi$ rd	0,005	0,0062	0,0069	0,0085	0,012	0,023	
$\Delta\varphi/\varphi$		0,024	0,013	0,011	0,011	0,018	
$\varphi°$	90	105	120	135	150	165	180
$\Delta\varphi$ rd	0,113	0,023	0,012	0,0085	0,0069	0,0062	0,005
$\Delta\varphi/\varphi$	0,072	0,013	0,0057	0,0036	0,0026	0,0021	0,0016

Fig.(5_19) Précision des mesures

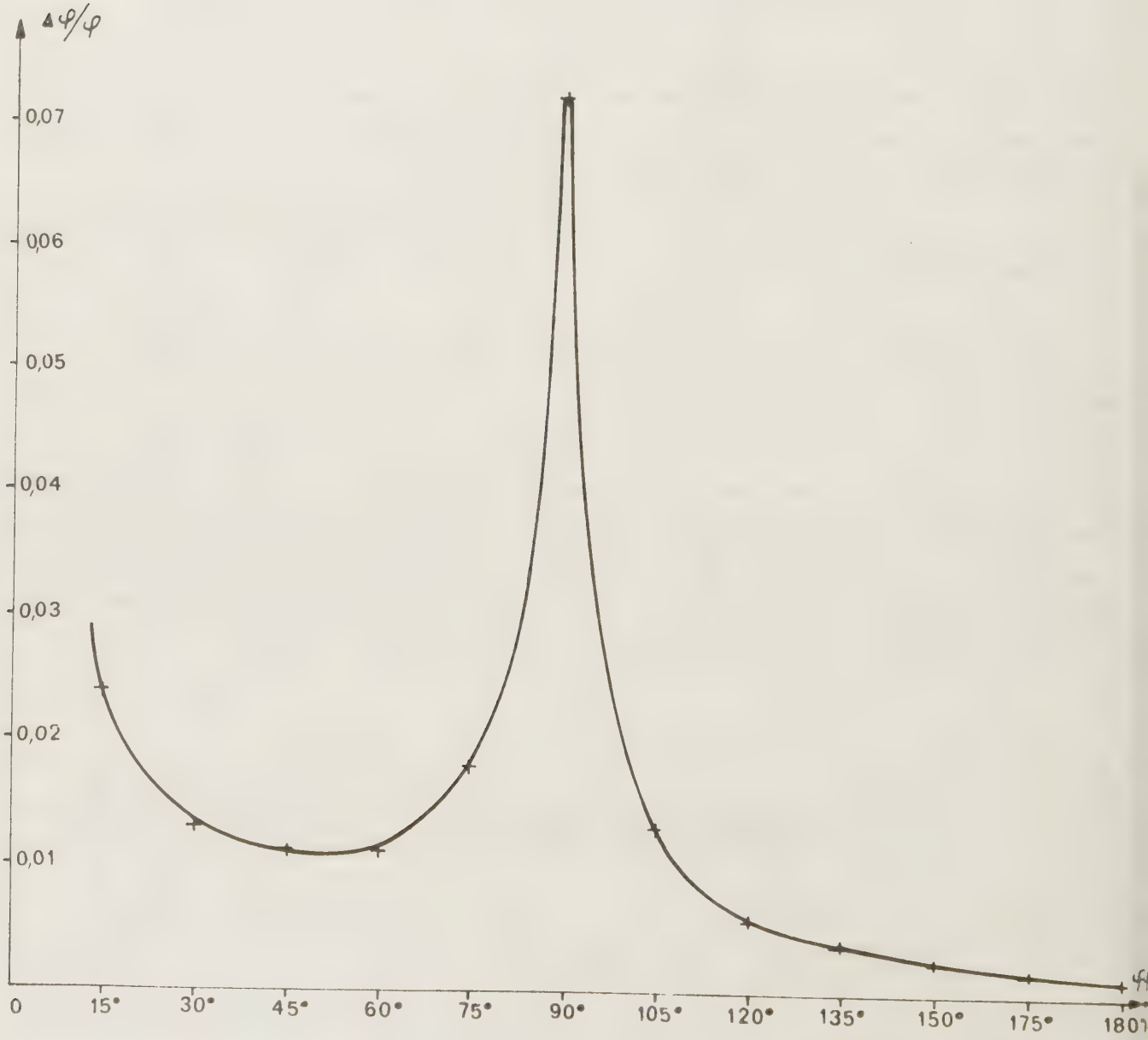


Fig.(5_20) Variation de la précision avec la biréfringence mesurée

où les contraintes sont presque constantes, nous avons augmenté le pas jusqu'à 5 mm dans le but de diminuer le nombre de réitérations de la méthode de séparation des contraintes principales donc les sources d'erreurs. Pour les fortes valeurs de λ, nous avons conservé un pas de 1 mm tout au long de la section minimum.

5,223 - *Précision et discussion des résultats*

Etant donné le nombre de points de mesure, il n'était pas possible, dans ces cas, de déterminer statistiquement la précision. Néanmoins, par un calcul d'erreur classique, nous pouvons obtenir une approximation de l'erreur maximum commise. Pour le calcul de la contrainte maximale au bord du trou, seule la valeur de sin ϕ est utile. Le coefficient de majoration de contraintes est le quotient de la biréfringence au point considéré par la biréfringence dans le reste de la plaque. L'erreur relative sur k est donc égale à la somme des erreurs relatives sur ces deux mesures.

ϕ est obtenu à partir de son sinus : ϕ = Arc sin x d'où $\frac{\Delta\phi}{\phi} = \frac{1}{\phi} \frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$. A l'aide de cette formule, il est possible de tracer un diagramme de $\frac{\Delta\phi}{\phi}$ en fonction de x sauf lorsque x est voisin de 1. Dans ce dernier cas, $\frac{\Delta\phi}{\phi}$ peut être calculé directement à l'aide d'une table trigonométrique. Le tableau (5.19) et le diagramme (5.20) ont été obtenus avec Δx = 0,006, erreur qui comprend :

- 0,001 pour la lecture de sin ϕ, le voltmètre digital donnant le millième.
- 0,001 pour le réglage du zéro de l'appareil
- 0,004 pour la stabilité de l'appareil. En effet, un inconvénient du photoélasticimètre bidimensionnel est son manque de stabilité. Il est impossible d'annuler la dérive du zéro, même après une longue période de chauffage. De plus, cette dérive est très aléatoire et peut être très importante en début de fonctionnement.

Nous voyons ainsi qu'entre zéro et 90° la précision varie de 1 à 7 % puis elle augmente rapidement avec la biréfringence. En prenant la précaution de vérifier très souvent le zéro de l'appareil (lumière circulaire), et lorsque cela est possible comme dans notre cas, en modifiant le chargement de telle sorte que le sin ϕ ne soit pas voisin de un, il est théoriquement possible de mesurer avec une précision de l'ordre de 1 %. Ainsi, nous devrions être sûrs de nos coefficients de majoration de contraintes à moins de 2 % près. Or si nous comparons nos résultats expérimentaux avec la théorie de Howland (Fi-. 5.15), nous constatons qu'il y a des écarts parfois supérieurs à 2 %. Pour expliquer ces différences, il faut se retourner vers les conditions expérimentales. D'abord, nos plaques sont obligatoirement limitées et les palonniers, bien qu'ayant été réalisés avec soin ne peuvent appliquer une traction absolument uniforme. Néanmoins, ce ne sont pas à notre avis les plus grosses causes d'erreurs ; elles sont dues au modèle lui-

même. On peut négliger les tolérances d'usinage et il en est de même pour les défauts de calibrage de l'épaisseur des plaques ; de par le principe même de la mesure ils n'ont aucune influence et l'asservissement du gain du photomultiplicateur compense automatiquement les variations de flux lumineux qui pourraient se produire.

Il reste la nature même du matériau et là, nous atteignons les véritables limites de l'appareil. Malgré nos recherches, nous n'avons pu trouver de matériau parfaitement homogène et exempt de biréfringence initiale. Sans exception tous les matériaux biréfringents (altuglass, araldite, CR39, trasallyl, ...) que nous avons étudiés présentent tous une biréfringence initiale plus ou moins importante. Ainsi, ces matériaux qui, pour la photoélasticité classique, peuvent être catalogués comme sans biréfringence initiale ne peuvent plus l'être lors de leur utilisation sur le photoélasticimètre type Robert. Il est à remarquer qu'il en est de même pour toutes les lames dites "quart d'onde" qui ne le sont plus qu'approximativement. Cette biréfringence, sans être vraiment importante (de l'ordre de quelques degrés) jointe aux défauts d'hétérogénéité de la matière suffit à expliquer les faibles écarts avec les résultats théoriques.

k \ θ°	0	15	30	45	60	75	90
Coker	3,53	3,24	2,12	0,88	-0,50	-1,08	-1,26
Howland	4,32	3,72	2,32	0,77	-0,51	-1,32	-1,58
bidimensionnel	4,55	3,91	2,42	0,84	-0,49	-1,23	-1,50

Fig. 5,21 - Comparaison des différents résultats obtenus théoriquement : par Howland |15|, expérimentalement : par Coker |27| et à l'aide du bidimensionnel Robert pour $\lambda = 0,5$.

Au passage, il est tout de même intéressant de comparer ces résultats expérimentaux avec ceux obtenus en photoélasticité classique. Par exemple, considérons les différents résultats (Fig. 5.21) au bord de la plaque pour $\lambda = 0,5$. Nous constatons que les résultats obtenus à l'aide du photoélasticimètre type Robert sont plus proches des valeurs théoriques de Howland que ceux obtenus par Coker, Chakko et Satake |27| en photoélasticité classique. Ces écarts sont dûs aux méthodes de mesure différentes. La supériorité de l'appareil Robert réside dans le fait que la mesure est quasiment ponctuelle et en conséquence, il permet de se rapprocher plus près des bords du modèle. Les écarts entre ces deux méthodes expérimentales croissent très rapidement avec le gradient des contraintes et il est à prévoir que pour $\lambda = 0,8$ par exemple, les résultats de photoélasticité classique ne donneraient plus qu'une valeur approximative du coefficient k pour $\theta = 0°$.

Pour la répartition des contraintes dans la section minimum (§ 5,222) le principe Robert est aussi plus adapté. En plus du fait que la mesure est ponctuelle, les intervalles des relevés sont exacts et les manipulations plus rapides. Malheureusement, la méthode de séparation des contraintes entraîne des erreurs cumulatives. C'est ainsi qu'en certains points des courbes (5.17) nous relevons des écarts de 8 % par rapport à la théorie de Howland. On remarque, lorsque λ croît, que les courbes tendent vers des droites ; la flexion dans la section minimum se superposant à la traction mais dans ce domaine, la théorie de Howland n'est plus applicable.

5,23 - *Plaques de largeur finie en traction percées d'un trou circulaire renforcé*

Ce paragraphe concerne l'étude des plaques de largeur finie, sollicitées en traction uniforme, percées d'un trou circulaire en leur centre renforcé par un bossage de section rectangulaire (Fig. 5,22). Etant donnée l'épaisseur nominale de la plaque d'altuglass (4 mm) il n'était pas question d'usiner les bossages dans la masse ; il fallait les rapporter.

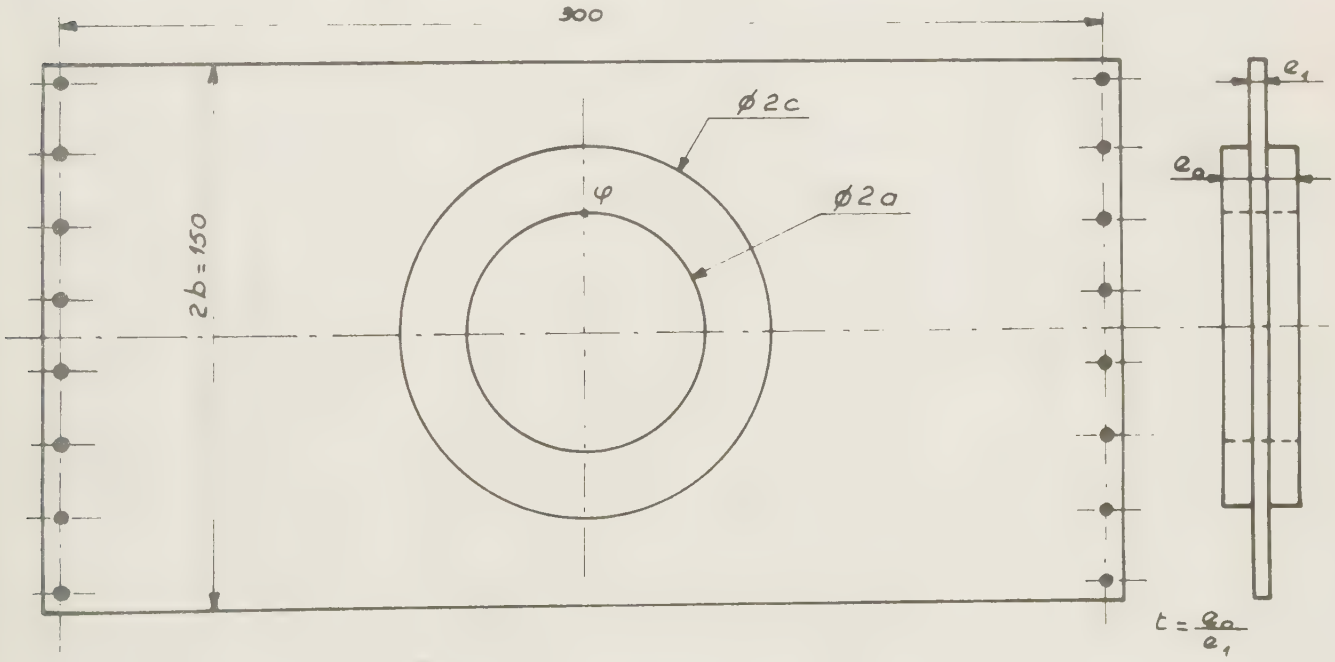
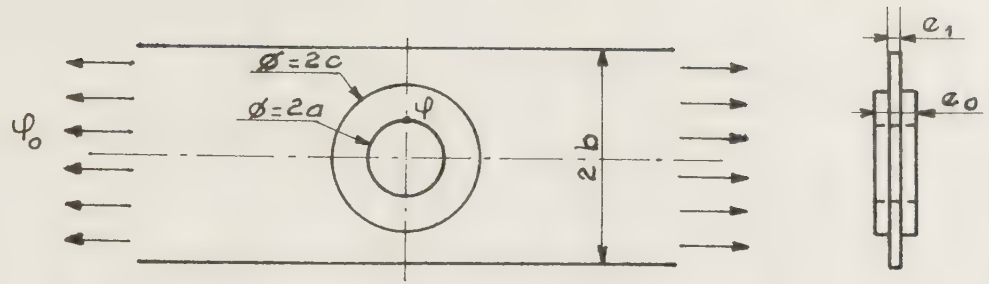


Fig. 5,22 - Plaque avec bossage

Les plaques ont été trépannées au diamètre extérieur 2C. Dans ce trou, avec un jeu de 0,05 à 0,10 mm, nous avons rapporté un cylindre creux d'épaisseur e_o. Il restait à réaliser la liaison entre ces deux parties ; divers essais ont été menés avec de l'altufix S, de la P10, de la P12, de la colle à jauge... L'altufix P12 s'est révélée la plus adaptée car notemment ce produit dissout le métacrylate de

$$t = \frac{e_0}{e_1}$$

$$K = \frac{\varphi}{t\,\varphi_0}$$



b/c	1,25	1,33	1,5	1,66	2	2	2,5	2,5	2,66	3	3,33	3,33	5	6,66
t \ a/c	0,25	0,33	0,3	0,33	0,2	0,5	0,25	0,5	0,66	0,3	0,33	0,66	0,5	0,66
1	3,22	3,38	3,22	3,22	3,08	3,38	3,08	3,22	3,38	3,08	3,08	3,22	3,08	3,08
1,5	2,28	2,52	2,40	2,42	2,22	2,66	2,29	2,52	2,83	2,34	2,38	2,69	2,42	2,51
2	1,74	1,92	1,85	1,91	1,73	2,13	1,84	2,08	2,43	1,91	1,95	2,32	2,02	2,20
3	1,17	1,33	1,30	1,35	1,20	1,64	1,35	1,63	2,00	1,40	1,44	1,91	1,62	1,85
4	0,90	1,02	1,02	1,07	0,99	1,33	1,09	1,36	1,70	1,15	1,22	1,69	1,45	1,63

tableau (5_23) Majorations de contraintes dans les bossages

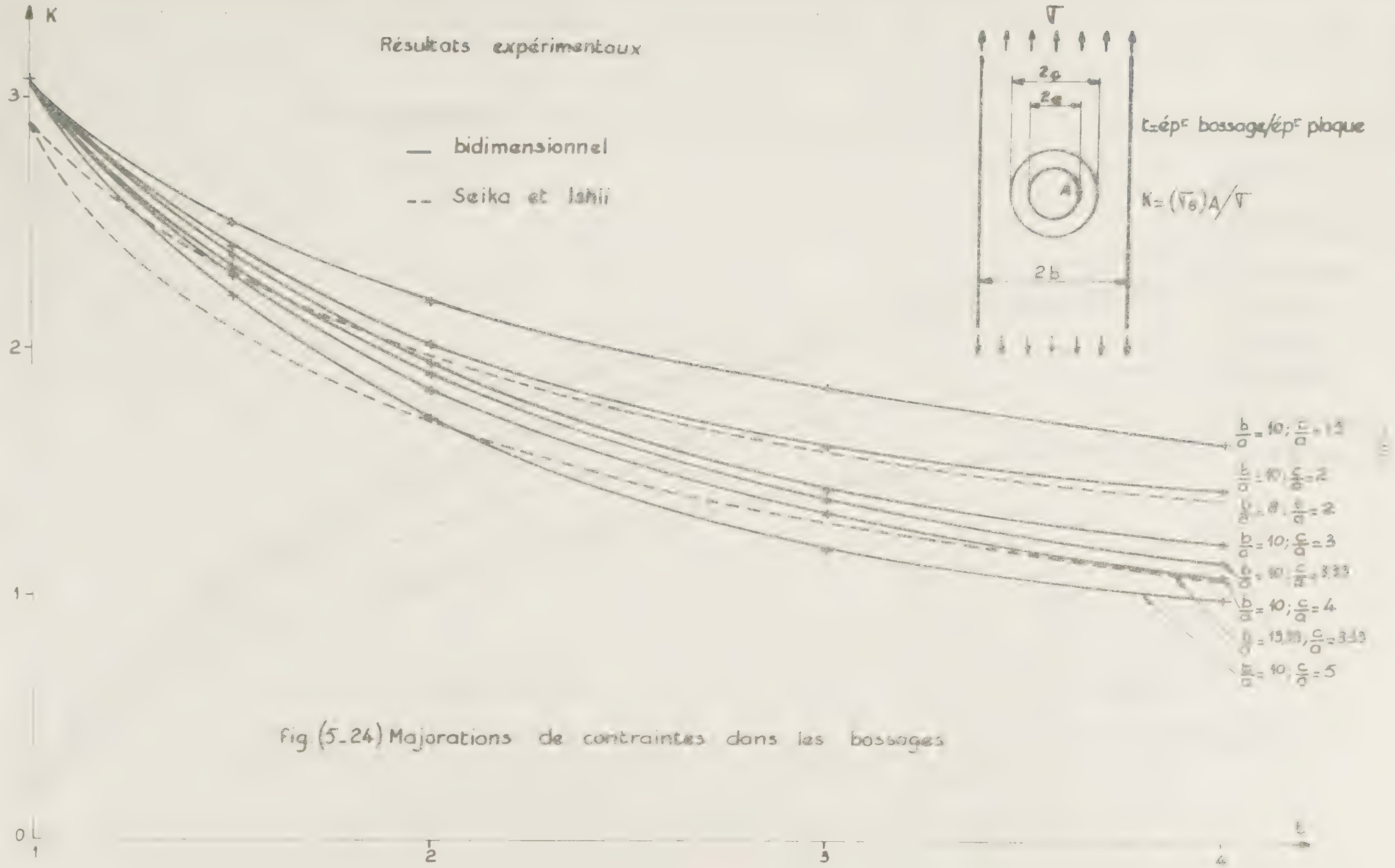


Fig. (5-24) Majorations de contraintes dans les bossages

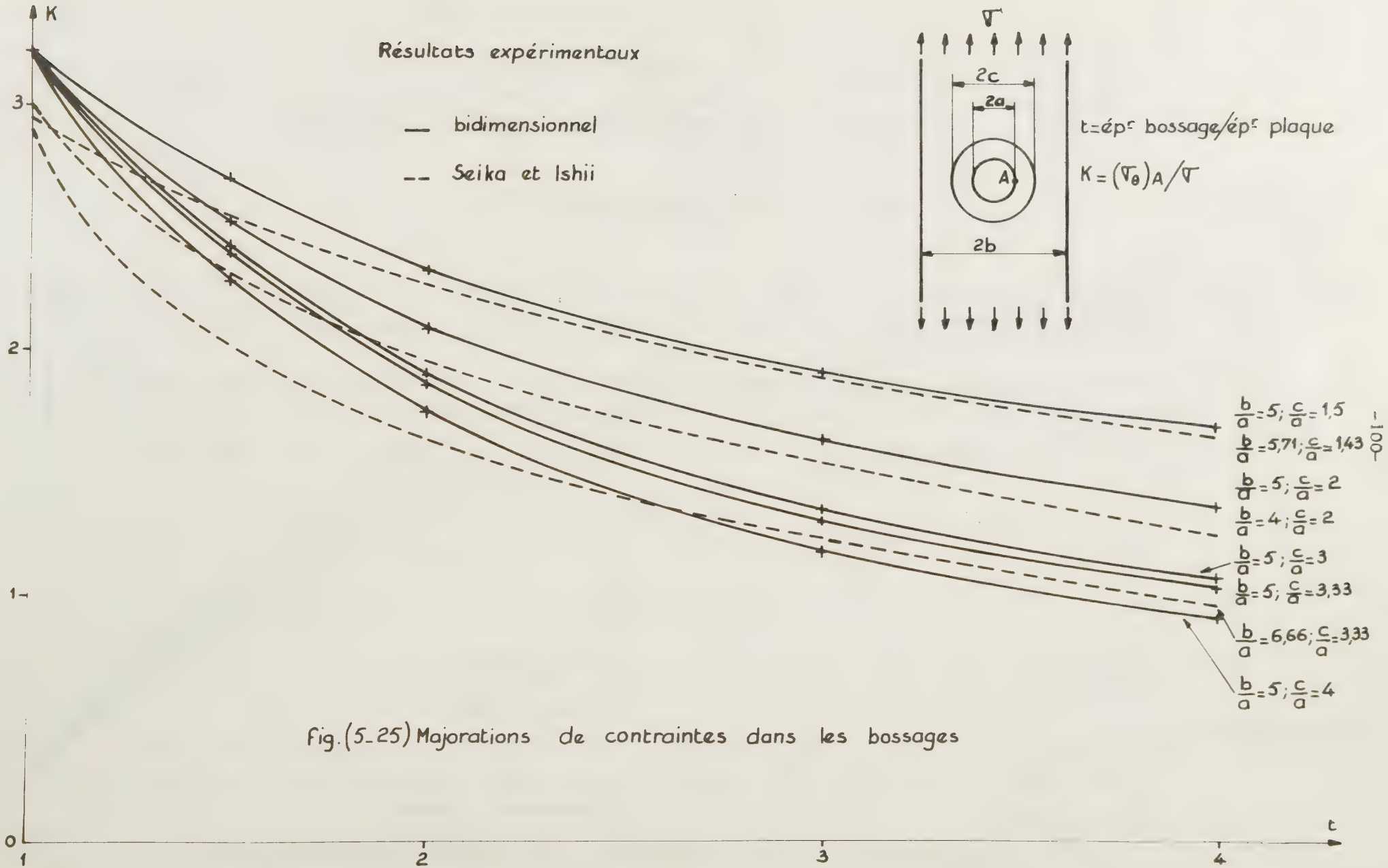


Fig. (5-25) Majorations de contraintes dans les bossages

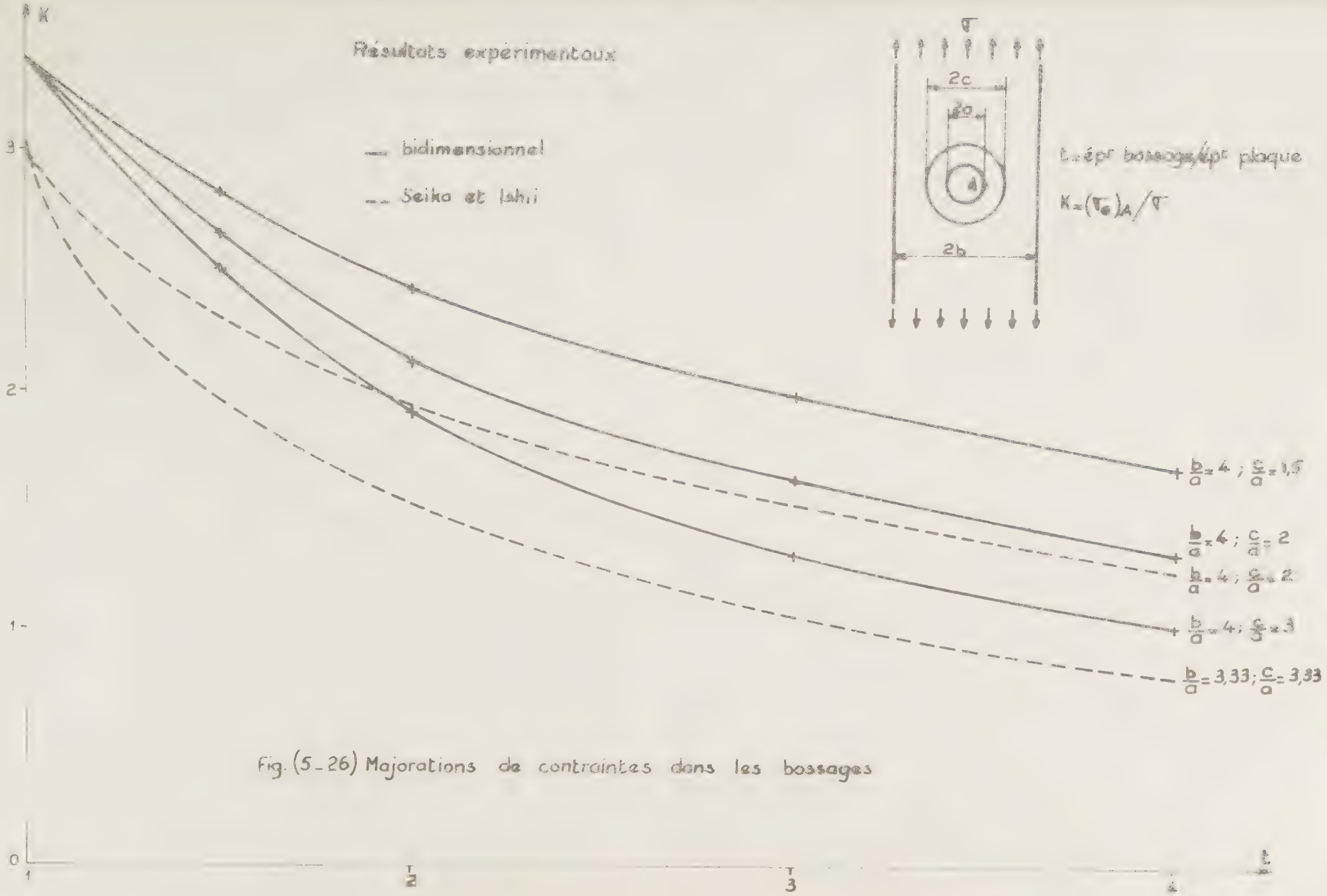


Fig. (5_26) Majorations de contraintes dans les bossages

méthyle puis polymérise en réalisant une véritable soudure. Cette opération a été réalisée sur un montage permettant le centrage du bossage par rapport à l'épaisseur de la plaque. A la liaison entre les deux, nous avons laissé un faible congé d'altufix P12 afin de renforcer la liaison.

Cependant, la polymérisation de l'altufix P12 a introduit des contraintes dans les plaques et les bossages telles qu'il n'était plus possible de faire de mesure précise. Nous avons alors recherché un traitement pour supprimer cette biréfringence initiale voisine de 24°. Après une suite d'essais systématiques, nous avons retenu un traitement de relaxation de 10 heures à 105°C avec une montée et une descente en température de 6° par heure. A ces températures, l'altuglass se ramollit aussi les pièces doivent elles être uniformément supportées pour éviter qu'elles se déforment. Dans ces conditions, la biréfringence initiale a été ramenée dans le modèle au voisinage de 10° et au bord du trou, elle était très faible.

Une plaque est définie par les trois paramètres a, c et e_o, les dimensions b et e_1 restant constantes et respectivement égales à 75 et 4 mm. Nous avons retenu pour a et c les couples de valeurs suivants (en mm) :

2a	15	15	15	15	15	15	30	30	30	30	30	37,5	37,5	37,5
2c	22,5	30	45	50	60	75	45	60	90	100	120	56,5	75	112,5

Pour chaque plaque, nous avons fait varier l'épaisseur du bossage soit $t = \frac{e_1}{e_o} = 1 ; 1,5 ; 2 ; 3 ; 4.$

Le dispositif de mise en traction était le même que celui décrit dans le § 5,13.

5,231 - Mesures

Nous avons obtenu le coefficient de majoration de contraintes dans le bossage, au bord du trou, sur l'axe perpendiculaire à la direction de la traction en faisant le rapport de la biréfringence ϕ en cet endroit à la biréfringence nominale dans la plaque. De plus, il faut diviser ce rapport par le coefficient t afin de tenir compte des différences d'épaisseurs (état plan de contraintes) d'où $k = \frac{\phi}{t\phi_o}$. Etant donnée l'épaisseur relativement importante du bossage (jusqu'à 16 mm, nous avons du utiliser un liquide de même indice pour presque toutes les mesures. Les résultats ainsi obtenus ont été portés dans le tableau(55.23) et sur les graphique (5.24), (5.25) et (5.26).

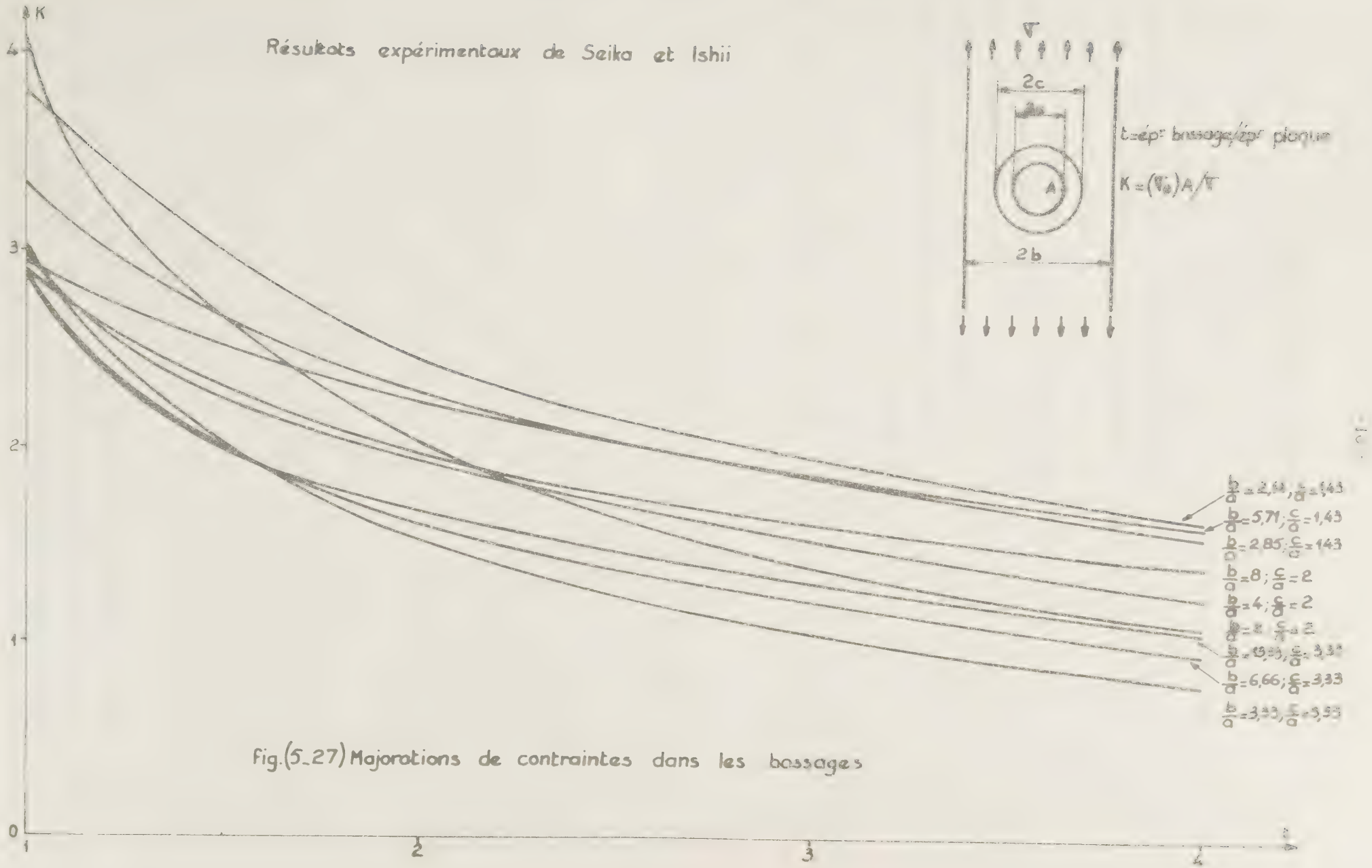


Fig.(5_27) Majorations de contraintes dans les bossages

5,232 - *Précision et discussion des résultats*

Dans le cas des bossages, la précision des mesures est plus faible que pour les cas précédent. Outre le fait de rendre les manipulations plus délicates, le liquide de même indice augmente les difficultés de repèrage du bord du trou. D'autre part, lorsque l'épaisseur du bossage est importante, il n'est guère possible de mesurer à moins de 0,3 mm du bord car le pinceau lumineux diffracte plus tôt.

Le rayon du laser traversant les parois du bac contenant le liquide de même indice, parois qui sont aussi en altuglass de 3 mm d'épaisseur, la biréfringence initiale dans ces parois s'ajoute à la biréfringence due aux contraintes résiduelles dans le bossage. Enfin, les variations de l'épaisseur du bossage ont été obtenues par usinage de celui-ci. De ce fait, il a été nécessaire de polir les faces du bossage et malgré toutes les précautions, les bords du trou ont été très légèrement arrondis d'où une raison de plus pour que le pinceau diffracte au bord du trou. Malheureusement, il n'est pas possible de chiffrer ces différentes sources d'erreurs; après avoir repété plusieurs fois les mêmes mesures, nous pensons que les erreurs sur sin ϕ sont trois ou quatre fois plus importantes que pour les cas étudiés précédemment.

Par contre, l'erreur sur le coefficient de majoration de contraintes n'est pas aussi importante que celle sur ϕ car $K = \frac{\phi}{t\phi_o}$, expression dans laquelle t est compris entre 1,5 et 4.

En définitive, les résultats ont été obtenus avec une précision très acceptable de l'ordre de 2 à 5 %, certainement supérieure à celle que l'on peut attendre de la photoélasticité classique. Néanmoins, il est intéressant de comparer ces résultats avec ceux obtenus par Seika et Ishii en photoélasticité (Fig. 5,27). Lorsque les paramètres choisis par ces auteurs étaient voisins des notres, nous avons reproduit leurs courbes sur les Fig. (5.24), (5,25) et (5.26) où figurent les résultats obtenus à l'aide du photoélasticimètre Robert.

Lorsque les bossages ont une épaisseur relative importante (t = 2, 3, 4) nous constatons une bonne concordance des résultats ; les écarts sont au maximum de 8 %, nos résultats expérimentaux étant presque toujours supérieurs à ceux rapportés par Seika et Ishii. Par contre lorsque t est faible, nous notons des écarts plus importants atteignant 15 %, nos valeurs étant toujours supérieures. Ceci est explicable par les remarques déjà faites au § 5,223 à propos des résultats expérimentaux de Coker, Chakko et Satake. L'appareil Robert permet de mesurer plus près du bord d'une pièce que la photoélasticité classique et surtout plus ponctuellement. De plus, dans le cas présent, nous voyons nettement l'influence du gradient des contraintes sur les résultats obtenus par les deux méthodes. Ce résultat était prévisible dès un premier examen des résultats de Seika et Ishii. En effet, pour des pla-

ques finies ($\frac{b}{a}$ = 5,7 ; 6,66 ; 8 ; 13,3) sans renfort (t = 1) les valeurs rapportées sont déjà inférieures à 3, ce qui est en désaccord avec la théorie.

Une autre comparaison est possible avec les résultats obtenus à l'aide de la méthode que nous avons développée au Chapitre 4. Pour les bossages épais (t = 3,4) les écarts sont inférieurs à 5 %, les résultats expérimentaux étant, en général, supérieurs aux résultats théoriques. Par contre, lorsque t est faible, les résultats théoriques deviennent supérieurs aux résultats expérimentaux, constatation prévisible étant donné les hypothèses formulées dans le calcul théorique. Le cas le plus défavorable est obtenu lorsque t = 1 (pas de bossage du tout) ; ainsi pour $\frac{b}{a}$ = 4 nous obtenons k = 3,39 expérimentalement contre 3,63 par la théorie, ce qui correspond à une différence de 7 %. Cet écart augmente encore en même temps que le rapport b/a mais nous sommes dans le cas le plus défavorable où t = 1 alors que la théorie a été faite pour des plaques renforcées.

Nous constatons ainsi que même si la théorie du § 4 est approximative, étant donné les hypothèses avancées, les valeurs ainsi obtenues sont très proches des résultats expérimentaux.

5,24 - *Plaques en traction percées d'un trou elliptique*

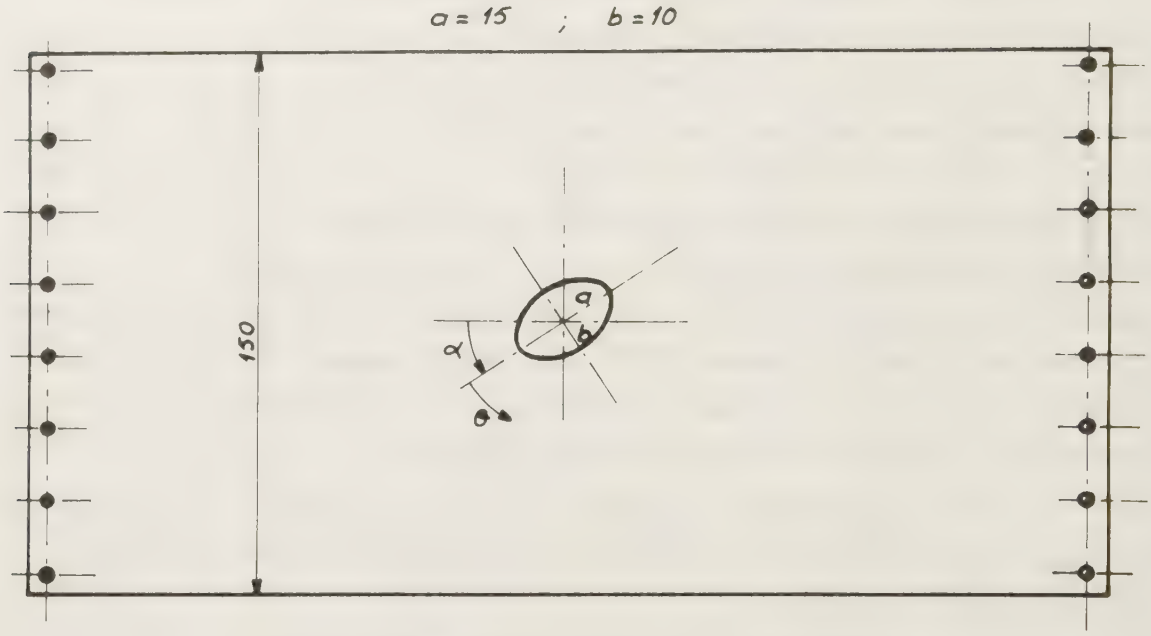
5,241 - *Variation du coefficient de majoration de contraintes au bord du trou en fonction de la direction de la tension pour une plaque large par rapport aux axes de l'ellipse.*

Les ellipses ont une excentricité de 2/3 avec un grand axe de 30 mm. La valeur du grand axe a été choisie en fonction de deux contingences contradictoires. Nous étions limités à 150 mm pour la largeur des plaques et d'autre part, les dimensions de l'ellipse devaient être aussi importantes que possibles afin d'améliorer la précision d'exécution et le repèrage des points de mesure. Ainsi, dans le cas où le grand axe est perpendiculaire à la direction de la tension, nous avons un rapport δ entre le grand axe de l'ellipse et la largeur de la plaque de 0,20.

Si nous nous référons aux résultats théoriques de Howland concernant les concentrations de contraintes au bord d'un trou circulaire dans une plaque en traction (Fig. 22.3) nous constatons que les valeurs du facteur de concentration de contraintes varient d'abord peu avec λ = a/b. Ainsi, entre les valeurs relevées pour λ = 0 et λ = 0,2, les écarts sont voisins de 5 %. Nous pouvons donc considérer que notre plaque de largeur 150 mm percée d'un trou elliptique de grand axe 30 mm est sensiblement infinie.

Nous avons réalisé des plaques (Fig. 5,28) percées de trous elliptiques différemment orientés par rapport à la direction de la traction avec une très bonne précision (supérieure au dixième de millimètre pour les dimensions et de l'ordre de quelques dixièmes de degrés pour les angles). L'usinage a été réalisé à

la lime et contrôlé avec des calibres de grande précision, eux-mêmes vérifiés sur un projecteur de profils.



5.28 - Plaque percée d'un trou elliptique

Pour des inclinaisons α de 15° en 15° du grand axe de l'ellipse par rapport à la direction de la traction, nous avons relevé les coefficients de majoration de contraintes au bord du trou pour θ = 0, 15, 30, 45, 60, 75 et 90°, θ étant l'angle des coordonnées paramétriques de l'ellipse. Les résultats obtenus ont été portés dans le tableau (5.29) et sur les diagrammes (5.30) et (5.31).

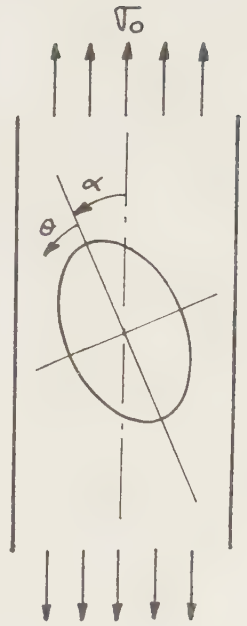
5,242 - *Coefficient de majoration de contraintes au bord d'un trou elliptique dans une plaque en traction de largeur finie*

Dans le cas où le grand axe de l'ellipse est perpendiculaire à la direction de la traction, nous avons relevé les variations du coefficient de majoration de contraintes aux extrêmités du grand axe lorsque la plaque n'est plus de largeur infinie. Pour cela, nous avons réalisé des plaques percées de trou elliptique d'excentricité 2/3 et de grand axe : 60, 80, 100 et 120 mm, la largeur de la plaque étant toujours de 150 mm. Nous avons ainsi fait varier le coefficient δ de 0,2 à 0,8. Les valeurs obtenues ont été portées sur le diagramme (5.32). Nous avons aussi calculé le coefficient de majoration de contraintes par rapport à la traction moyenne dans la section minimum de la plaque : $k_1 = \frac{\phi}{\phi_o}$ (1 -) déjà utilisé dans le § (5.221).

5,243 - *Précision et discussion des résultats*

En plus des erreurs recencées dans le cas des plaques percées

α°	k \ θ°	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	160	175
0	exp.	-1,03	-0,53	0,48	1,43	1,97	2,31	2,50					
	théo.	-1,000	-0,536	0,429	1,309	1,905	2,230	2,334					
15	exp.	-0,63	0,43	1,50	2,34	2,59	2,51	2,20	1,72	1,08	0,29	-0,56	-1,06
	théo.	-0,664	0,442	1,560	2,219	2,452	2,385	2,111	1,663	1,054	0,295	-0,506	-1,000
30	exp.	0,25	1,69	2,61	2,88	2,67	2,12	1,60	0,85	0,12	-0,52	-0,95	-0,79
	théo.	0,251	1,676	2,573	2,783	2,549	2,086	1,500	0,837	0,129	-0,550	-1,000	-0,825
45	exp.	1,63	2,93	3,31	2,92	2,28	1,47	0,78	-0,02	-0,61	-1,03	-0,89	-0,06
	théo.	1,502	2,829	3,207	2,848	2,172	1,413	0,667	-0,0285	-0,622	-1,000	-0,919	-0,0572
60	exp.	2,87	3,68	3,27	2,40	1,39	0,52	-0,11	-0,68	-0,99	-0,92	-0,29	1,09
	théo.	2,752	3,599	3,288	2,397	1,419	0,548	-0,166	-0,701	-1,000	-0,935	-0,285	1,098
75	exp.	3,78	3,84	2,91	1,61	0,49	-0,28	-0,72	-1,02	-0,92	-0,36	0,75	2,51
	théo	3,669	3,773	2,794	1,553	0,495	-0,278	-0,777	-1,000	-0,902	-0,371	0,731	2,330
90	exp.	4,13	3,34	1,95	0,54	-0,33	-0,82	-1,08					
	théo.	4,000	3,310	1,858	0,539	-0,354	-0,845	-1,000					



$$k = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0}$$

($\theta° = 0, 15, 30, \ldots 90$)

θ : coordonnée paramétrique de l'ellipse

tableau (5_29) Majorations de contraintes au bord d'un trou elliptique dans une plaque en traction

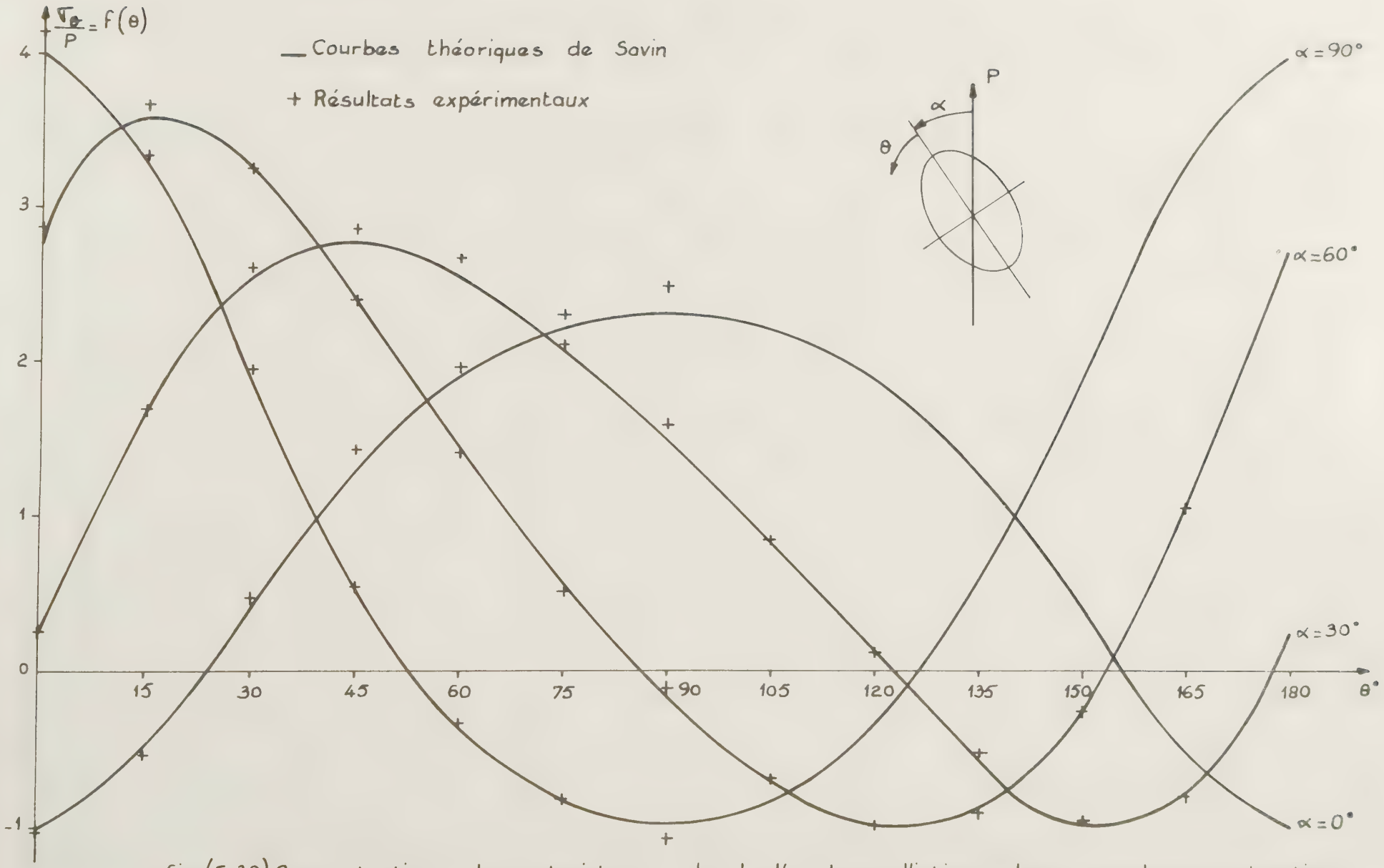


Fig. (5_30) Concentrations de contraintes au bord d'un trou elliptique dans une plaque en traction

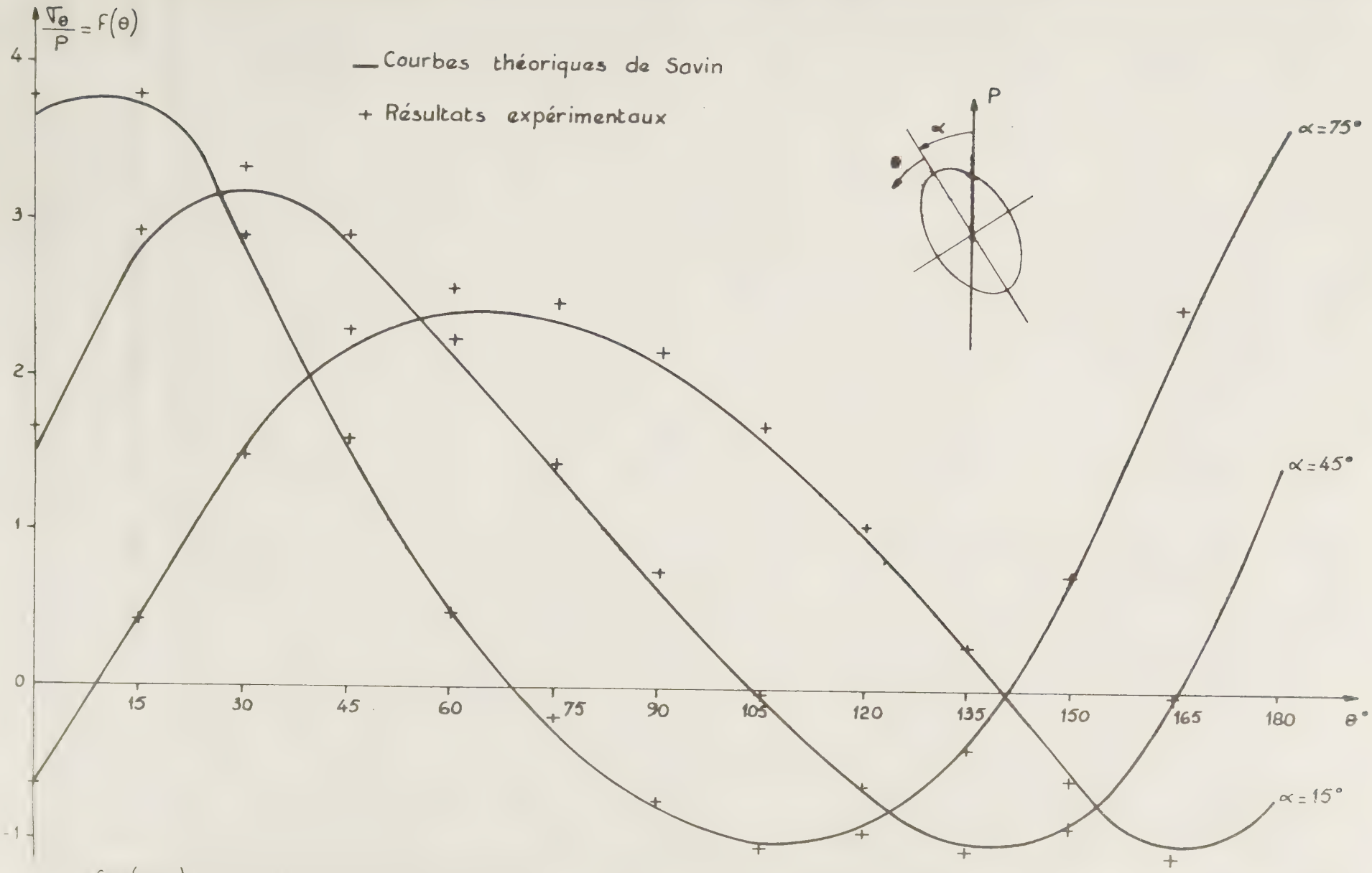
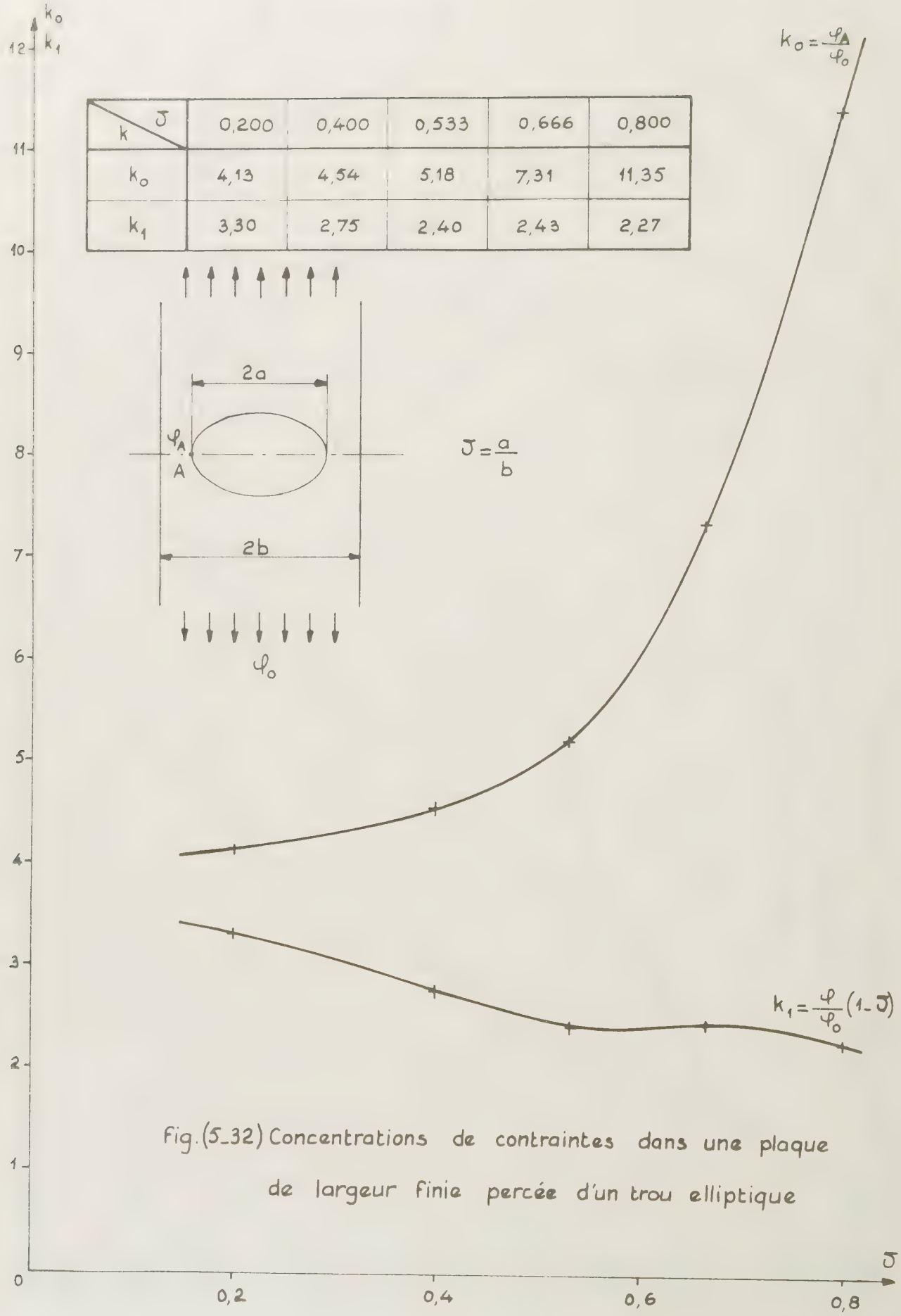


Fig. (5_31) Concentrations de contraintes au bord d'un trou elliptique dans une plaque en traction



k \ $\mathcal{J}$	0,200	0,400	0,533	0,666	0,800
k_0	4,13	4,54	5,18	7,31	11,35
k_1	3,30	2,75	2,40	2,43	2,27

Fig. (5_32) Concentrations de contraintes dans une plaque de largeur finie percée d'un trou elliptique

d'un trou circulaire, il faut ajouter celles dues aux formes de l'orifice. En ce qui concerne les cotes de l'ellipse, les erreurs sont négligeables puisque les tolérances étaient inférieures au dixième de millimètre. La source d'erreurs supplémentaires est due aux difficultés de localisation des points à mesurer. Nous avons dû repérer les points de mesures en coordonnées cartésiennes à partir des coordonnées paramétriques de l'ellipse par rapport au centre de l'ellipse qui est lui-même difficile à localiser. Néanmoins, les résultats expérimentaux sur les graphiques (5.30) et (5.31) sont voisins des valeurs théoriques de Howland (écart maximum de 7 %).

Nous remarquons tout de même que les valeurs expérimentales sont presque toujours supérieures, en valeur absolue, aux valeurs théoriques. Ayant vérifié la contrainte nominale dans la plaque, nous pouvons expliquer ces différences toujours dans le même sens par le fait que les valeurs théoriques correspondent à une plaque infinie, ce qui n'était pas le cas de notre modèle. Diminuer la valeur des axes de l'ellipse nous aurait rapproché des conditions de la plaque infinie ($\delta = 0$) mais nous aurions multiplié les causes d'erreurs en augmentant les difficultés de localisation des points à mesurer.

5,3 - *METHODE DES ELEMENTS FINIS* -

5,31 - *Principe et résultats de la méthode*

Parmi les méthodes d'investigation des problèmes plans, en marge des méthodes théoriques et expérimentales classiques, il convient de citer la méthode des éléments finis. Cette méthode récente, les premières publications dues à M.J. TURNER, R.W. CLOUGH, H.C. MARTIN et L.J. TOPP datant de 1956 |30|, doit ses développements à l'apparition de la troisième génération des ordinateurs. Le manuel, dans ce domaine, que l'on peut considérer comme référence est celui de ZIENKIEWICZ |31| .

Alors que par exemple, la méthode des différences finies constitue la solution approchée d'un problème posé en termes exacts ; la méthode des éléments finis donne la solution exacte (dans le sens ordinateur) d'un problème posé en termes approchés. Ceci montre que la précision de cette méthode n'est seulement limitée que par la manière dont est posé le problème. Cette précision sera notamment fonction de la taille, donc du nombre d'éléments mais aussi des fonctions retenues pour expliciter, soit les contraintes, soit les déplacements à l'intérieur d'un élément. On peur miser que par exemple, pour les déplacements, la fonction quadratique retenue pour l'élément TRIM-6 donnera une précision supérieure à la fonction linéaire retenue pour l'élément courant TRIM-3.

Nous ne rappelerons ici que très succinctement le principe de la méthode. Elle consiste à satisfaire la relation entre les forces et les déplacements $\vec{F} = K\vec{\Delta}$ non pas en tout point de la structure étudiée mais en un nombre fini de

nts judicieusement choisis. La relation devient alors

$$|F| = |K| \; |\Delta|$$

où $|F|$ et $|\Delta|$ sont des matrices colonnes.

Les difficultés rencontrées lors de la mise au point des programmes sur ordinateur portent sur la matrice raideur $|K|$ et sont de deux ordres. Une première difficulté à surmonter est l'établissement de la matrice qui néanmoins est automatique lorsque l'on connaît les propriétés du matériau et les coordonnées des noeuds.

En effet, la raideur de la structure est la somme des raideurs élémentaires $|K|_e$ de chaque élément. D'après le théorème des travaux virtuels, cette matrice peut se mettre sous la forme : $|K|_e = \int |B|^T \; |D| \; |B| \; d$ (volume) dans laquelle : $|B|$ est la matrice reliant les déformations aux déplacements à l'intérieur d'un élément : $|\varepsilon|_e = |B| \; |\delta|_e$

$|D|$ est la matrice Elasticité reliant les contraintes aux déformations à l'intérieur d'un élément : $|\sigma|_e = |D| \; |\varepsilon|_e$.

Entre les déplacements u et v d'un point et ses coordonnées x et y, il doit exister une relation à l'intérieur d'un élément que bien entendu l'on ne connaît pas. L'hypothèse sur la nature de cette relation constitue la deuxième approximation de la théorie des éléments finis après celle qui consiste à discrétiser le milieu continu étudié.

La deuxième difficulté rencontrée dans l'établissement du programme est l'inversion de la matrice globale $|K|$. En effet, les dimensions de cette matrice sont très rapidement imposantes dès que l'on veut obtenir une précision acceptable. En effet, dans le cas de problèmes plans, chaque noeud possède deux degrés de liberté ce qui conduit à une matrice $|K|$ de dimensions (2n, 2n). Heureusement, les matrices élémentaires $|K|_e$ dépendent d'un nombre restreint de points délimitant l'élément. Ainsi, en prenant des précautions particulières lors de la numérotation des noeuds d'un même élément, il est possible de réduire $|K|$ à une matrice bande, ce qui simplifie le problème de son inversion, la largeur de bande étant définie par la différence entre les numéros d'ordre de deux noeuds d'un même élément.

De la nature de la relation entre les déplacements et les coordonnées d'un point à l'intérieur d'un élément donné dépend d'une part, la précision de la méthode des éléments finis et d'autre part, la difficulté du calcul de $|K|_e$.

$$|K|_e = \int |B|^T \; |D| \; |B| d \text{ (volume)}$$

Par exemple, si pour un élément triangulaire on suppose que la relation est linéaire, c'est-à-dire :

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$$

les déformations et en conséquence la matrice $|B|$ sont constantes à l'intérieur de l'élément (TRIM-3). Si de plus nous avons un matériau homogène et isotrope sollicité dans le domaine élastique, la matrice $|D|$ est aussi une constante.

Dans ces conditions le calcul de la matrice raideur pour un élément, se ramène à celui du produit :

$$|K|_e = |B|^T \, |D| \, |B| \text{ (volume de l'élément)}$$

Ayant ainsi déterminé les déplacements $|\Delta|$ à partir de $|F|$ et $|K|$, il est possible d'en déduire les contraintes qui ne seront très certainement pas continues d'un élément à l'autre.

Les résultats suivants ont été obtenus à l'aide du programme "plane-stress" mis au point dans le laboratoire d'analyse des contraintes des Professeurs J. KESTENS et R. VAN GEEN de la Faculté des Sciences Appliquées de l'Université libre de Bruxelles.

Ce programme permet de résoudre, par discrétisation en 800 éléments et 900 noeuds maximum nombre de problèmes plans dans lesquels peuvent intervenir 12 matériaux différents, à des températures différentes, avec des modules d'Young en traction et en compression différents, tout en tenant compte des forces de masse. La différence entre les numéros d'ordre des noeuds d'un même élément qui définit la largeur de la matrice bande peut atteindre 39. L'inversion de la matrice $|K|$ fait appel à la méthode de CHOLOWSKI (décomposition de $|K|$ en deux matrices triangulaires, inférieure et supérieure). L'ordinateur utilisé était un CDC 6400. Les éléments peuvent être triangulaires (TRIM-3) ou rectangulaires (REM-4).

Nous aurions pu reprendre, avec la méthode des éléments finis, tous les cas étudiés précédemment. Néanmoins, ce chapitre ne voulant avoir qu'une valeur indicative, nous nous sommes bornés à l'étude de quelques plaques seulement percées de trous circulaires, renforcés ou non.

La première plaque étudiée est représentée avc son découpage sur les figures (5.33) et (5.34). Etant donné la symétrie du chargement et de la géométrie de la plaque, nous nous sommes limités à l'étude d'un quart de plaque en imposant les conditions aux limites suivantes :

- pour les noeuds $X = 0$: $u = 0$
- pour les noeuds $Y = 0$: $v = 0$

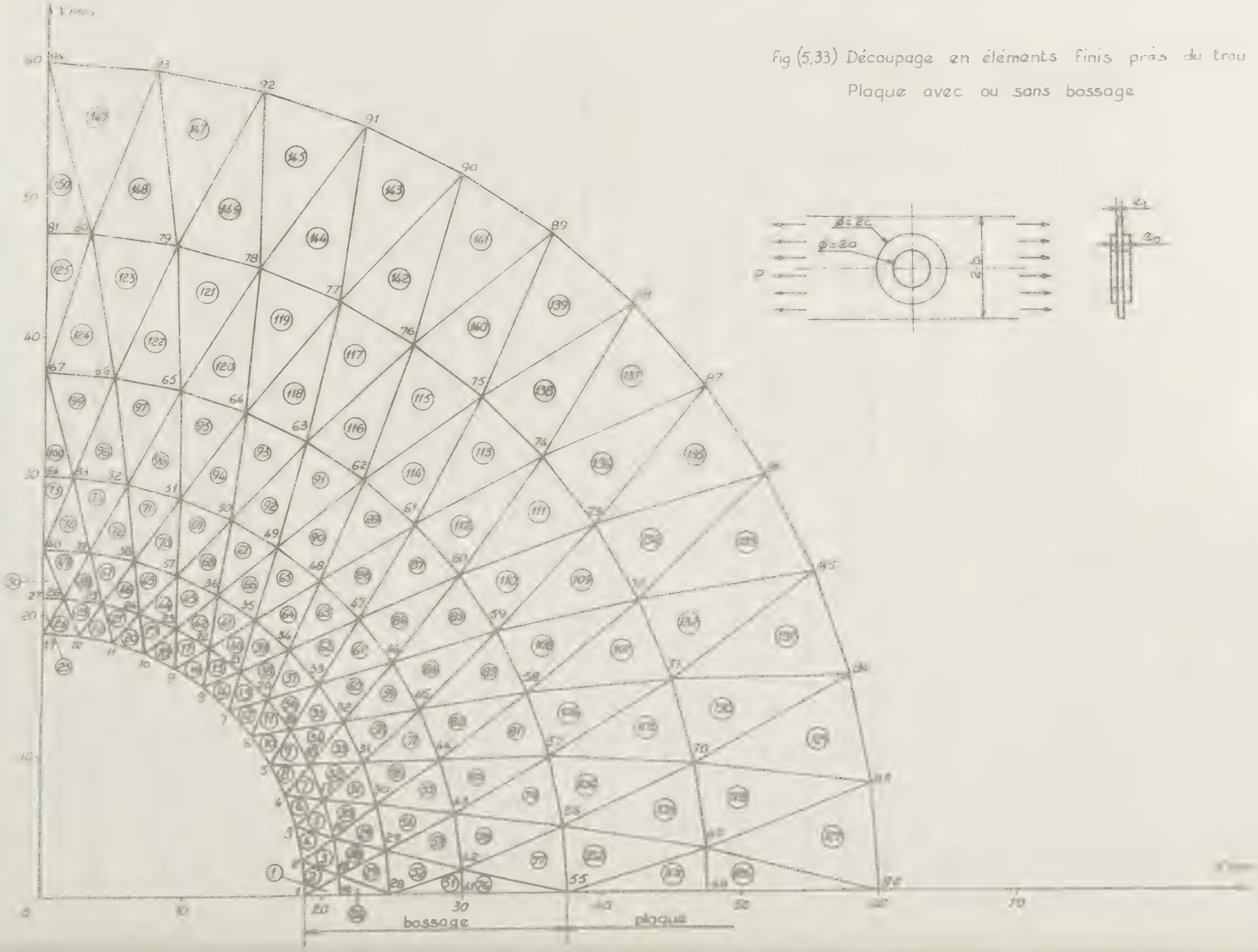
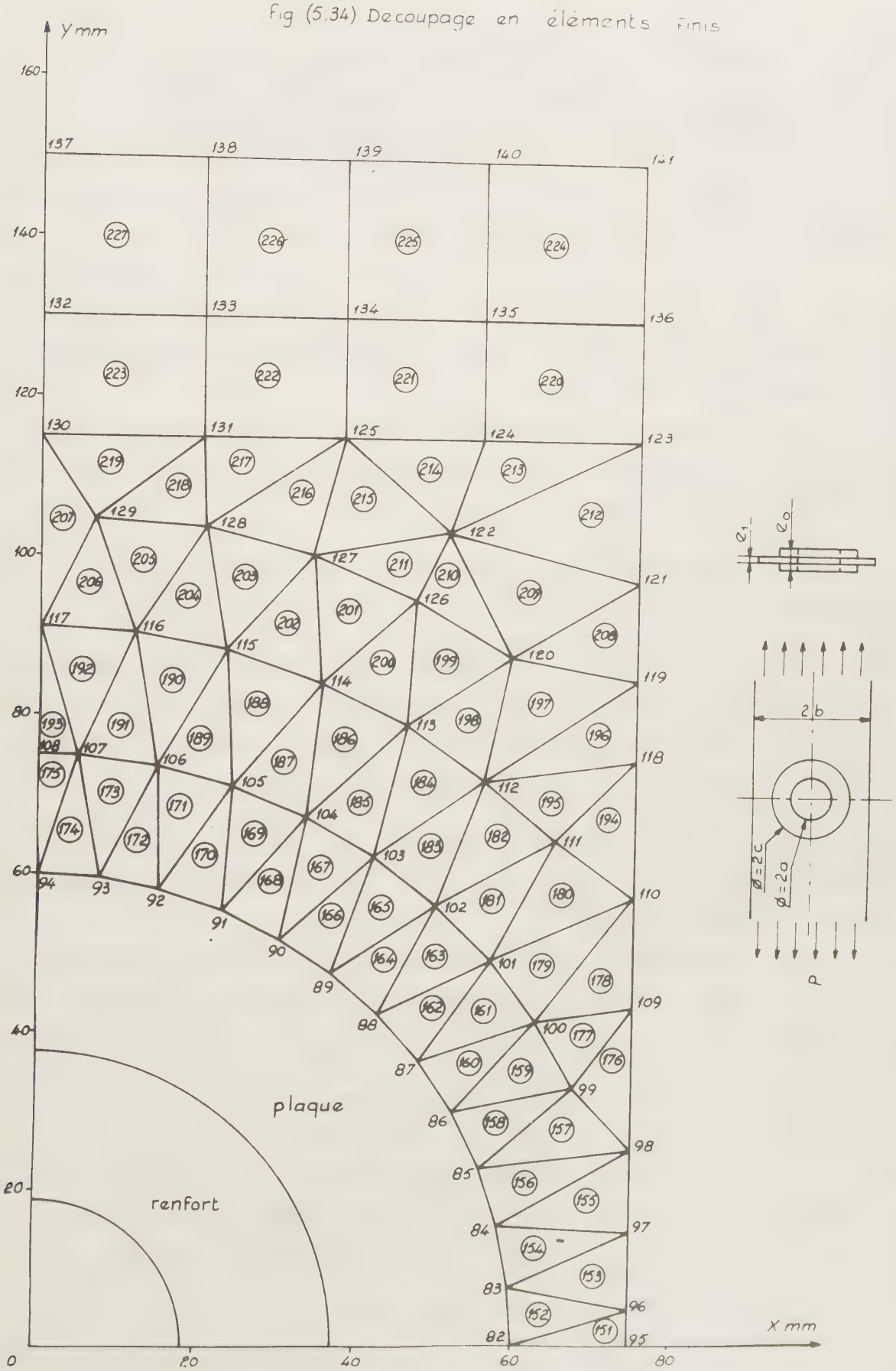


fig. (5,33) Découpage en éléments finis près du trou

Plaque avec ou sans bossage

fig (5.34) Decoupage en éléments finis



La plaque avait une demi-largeur b = 75 mm et était percée en son centre d'un trou circulaire de diamètre 2a = 37,5 mm. Nous avons découpé cette plaque en [illegible] éléments triangulaires et 8 éléments rectangulaires, d'autant plus petits que le gradient des contraintes est important. Ainsi, l'élément 2, au bord du trou, où le coefficient de majoration de contraintes est le plus important avait son centre de gravité situé à 0,76 mm du bord du trou. Nous avons obtenu un coefficient de majoration de contraintes de 3,149 pour la contrainte maximum et pour l'élément 24, toujours au bord du trou mais décalé de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à l'élément 2, nous avons obtenu un coefficient de majoration de contraintes de -1,081.

L'étape suivante a consisté à renforcer le même trou circulaire dans la même plaque à l'aide d'un bossage de section rectangulaire ayant un diamètre extérieur : 2c = 75 mm. Ce bossage était constitué du même matériau que la plaque : $E = 2.10^4$ daN/mm^2 et $\nu = 0,3$.

Pour une épaisseur de plaque de 1 mm et un bossage d'épaisseur 2 mm, nous avons obtenu un maximum pour le coefficient de majoration de contraintes dans l'élément 2 égal à 2,085 et pour l'élément 24 : -0,738.

Nous avons profité de la souplesse de la mise en oeuvre des éléments finis pour mettre en évidence l'influence de la valeur du coefficient de Poisson. Ainsi dans le cas de la plaque précédente, percée d'un trou circulaire et renforcée par un bossage de 2 mm d'épaisseur, constitué d'un matériau ayant même module d'Young que la plaque(2.10^4 daN/mm^2) nous avons attribué un coefficient de Poisson égal à 0,25 dans le bossage alors que celui de la plaque était égal à 0,3. Le découpage étant par ailleurs exactement le même que dans le cas précédent, nous avons obtenu pour l'élément 2 un maximum pour le coefficient de majoration de contraintes de 2,076 et pour l'élément 24 : -0,749. Ainsi, dans ce cas particulier, un écart proche de 20 % pour les coefficients de Poisson se répercute par un écart de 1 % sur les contraintes.

De la même manière, nous avons voulu montrer l'influence du module d'Young. Pour la plaque précédente, sans en changer la géométrie, nous avons égalé les coefficients de Poisson ($\nu = 0,3$) mais supposé des modules d'Young différents pour la plaque ($E = 2.10^4$ daN/mm^2) et pour le bossage ($E = 10^4$ daN/mm^2). Ces valeurs ont donné dans l'élément 2 un coefficient maximum de majoration de contraintes de 1,575 et pour l'élément 24 : -0,540. Nous voyons qu'il en résulte une diminution de 25 % de la contrainte maximum. Physiquement, cela s'explique par le fait que le bossage en matériau plus souple que la plaque répartit mieux les efforts.

En dernier lieu, nous avons fait varier la largeur de la plaque (Figures 5,35 et 5,36). Tout en conservant le diamètre du trou (2a = 37,5 mm) et le diamètre extérieur du bossage (2c = 75 mm) nous avons ramené la largeur de la plaque à 2b = 75 mm. Le découpage comportait 154 éléments pour 99 noeuds. Nous

Fig. (5,35) Découpage en éléments finis dans le bossage

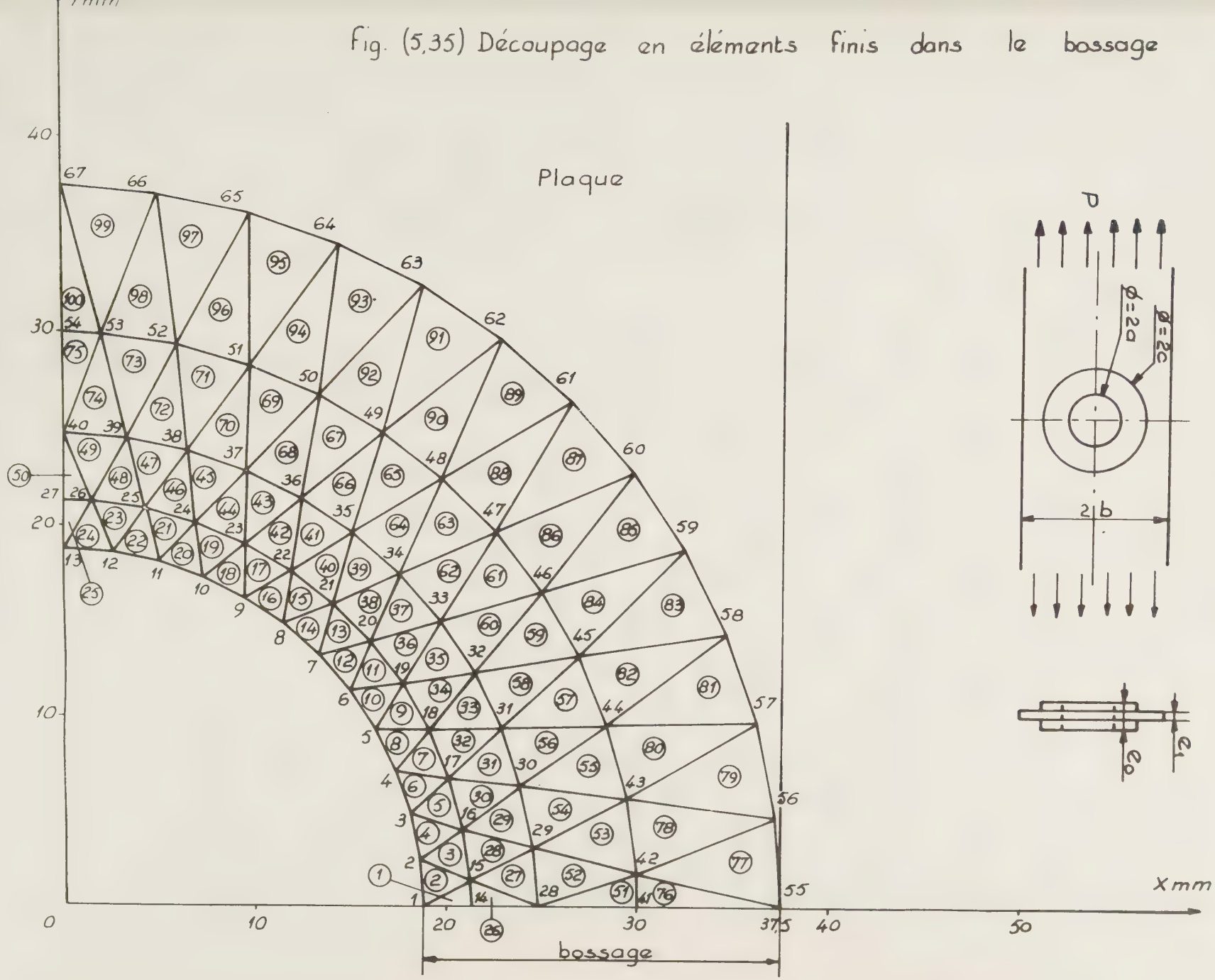
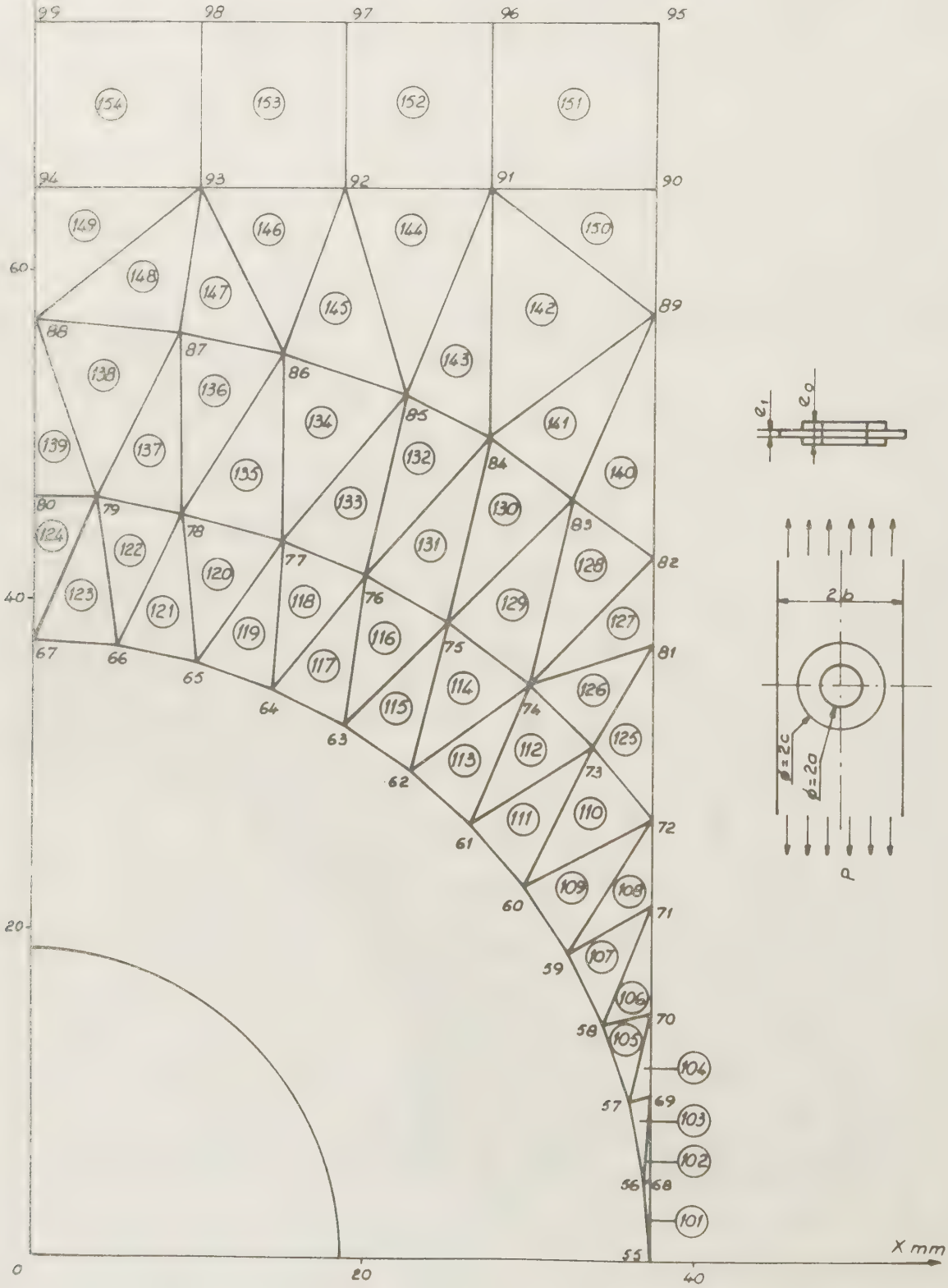


Fig (5.3b) Decoupage en elements finis dans la plaque



avons supposé la plaque et le bossage constitués du même matériau : ($E = 2.10^4$ daN/mm^2 et $\nu = 0,3$). En faisant varier l'épaisseur du bossage, celle de la plaque restant égale à 1 mm, nous avons obtenu les valeurs suivantes respectivement dans les éléments 2 et 24 pour les coefficients de majoration de contraintes :

- épaisseur du bossage : 2 mm
  + 2,391 et - 0,986
- épaisseur du bossage : 1,5 mm
  + 3,005 et - 1,188
- épaisseur du bossage : 1 mm (renforcement nul)
  + 4,122 et - 1,532

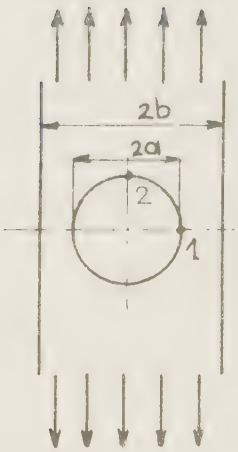
5,32 - *Discussion des résultats*

Avant toute discussion, il convient de comparer les résultats précédents à ceux obtenus, soit par la théorie, soit par l'expérimentation classique d'où les tableaux récapitulatifs suivants : Figures 5,37 et 5,38.

A l'aide de ces tableaux, on constate une bonne concordance entre les divers résultats. Cependant, dans la plaque non renforcée, les valeurs obtenues par la méthode des éléments finis sont généralement inférieures aux valeurs théoriques de Howmand et aux valeurs obtenues à partir de mesures faites sur le photoélasticimètre Robert. Ceci peut s'expliquer par le fait que les valeurs obtenues sont les valeurs moyennes à l'intérieur de l'élément. Nous avions opéré un découpage fin puisqu'au bord du trou, les éléments triangulaires de 2,5 mm de côté environ avaient leur centre de surface situé à 0,76 mm de la frontière. Cependant, nous n'avons pas utilisé les capacités maximum du programme ; au lieu de se limiter à une largeur de bande de 14, comme nous l'avons fait, nous aurions pu aller jusqu'à 39, ce qui aurait sensiblement divisé par trois la taille des éléments. Il en aurait certainement résulté une meilleure précision quoique l'écart avec la théorie de Howland soit déjà inférieur à 5 %.

En ce qui concerne les plaques renforcées, les écarts avec la théorie développée au Chapitre 4 sont faibles et restent inférieurs à 9 %, la théorie donnant des valeurs supérieures, ce qui est logique. Il n'est pas possible de généraliser à partir de deux valeurs mais la concordance entre les résultats du bidimensionnel et de la méthode des éléments finis est remarquable puisque les écarts sont inférieurs à 1 %. Par contre, aussi bien dans un cas comme dans l'autre, la divergence avec les valeurs de Coker-Chakko-Satake comme avec celles de Seika et Ishii est très importante (écarts atteignant 25 %).

λ	0,25		0,50	
	K_1	K_2	K_1	K_2
Theorie de Howland	3,26	-1,19	4,32	-1,58
Expérimental (Coker)			3,53	-1,26
Expérimental (auteur)	3,41	-1,05	4,55	-1,50
Eléments finis	3,149	-1,081	4,122	-1,532

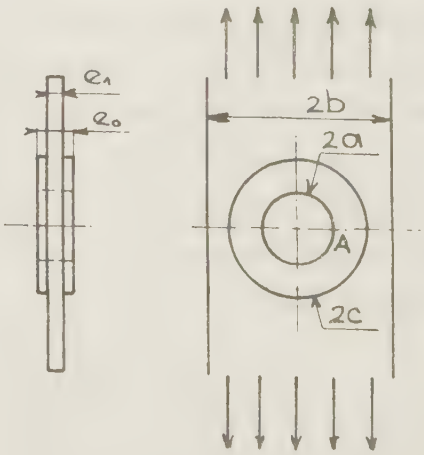


$\lambda = a/b$

K_1 et K_2 valeurs des coefficients de majoration de contraintes respectivement aux points 1 et 2

fig 5,37 _ plaque en traction percée

K_A	$\frac{b}{a}=4$ $\frac{c}{a}=2$		$\frac{b}{a}=2$ $\frac{c}{a}=2$	
t	1,5	2	1,5	2
Expérimental (Seika et Ishii)	2,25	1,95	2,70	2,05
Théorie (auteur)	2,735	2,216		
Expérimental (auteur)	2,52	2,08		
Eléments finis	2,498	2,085	3,005	2,391



K_A coefficient de majoration de contraintes au point A

fig 5,38 _ plaque en traction percée renforcée

Nous pensons que les comparaisons de ce paragraphe sont très suggestives. Elles montrent les progrès réalisés dans le domaine de la détermination expérimentale des contraintes. En effet, si l'on prend comme référence les valeurs théoriques, on s'aperçoit que dans l'échelle des précisions nous trouvons au voisinage de 25 % les valeurs obtenues en photoélasticité traditionnelle puis nettement plus haut, vers 5 % les valeurs obtenues soit à l'aide du photoélasticimètre Robert soit par la méthode des éléments finis.

6 - CONCLUSION

Après avoir fait le point des méthodes actuelles de calcul des contraintes dans les plaques percées d'orifices, nous avons pu comparer ces résultats théoriques aux résultats expérimentaux, grâce à un nouveau banc de photoélasticité. Ces études, sans être exhaustives, ont permisde mettre en évidence les limites actuelles des méthodes de calcul des contraintes des plaques percées.

S'il est possible de déterminer des fonctions potentielles permettant la détermination des contraintes dans le cas des plaques infinies, les méthodes restent le plus souvent sans ressource lorsqu'il s'agit de plaques finies et à fortiori quand les orifices sont renforcés. Moyennant des approximations simplificatrices, nous avons montré au Chapitre 4 qu'il est possible d'obtenir les coefficients de majoration de contraintes dans les plaques de largeur finie percées d'un trou circulaire centré et renforcé uniformément ; nos résultats expérimentaux ont confirmé les résultats théoriques avec des différences inférieures à 9 %. Il reste qu'en dépit de l'importance du problème, la théorie ne peut répondre aux exigences quasi quotidiennes de la technologie et à ses progrès.

En conséquence, l'amélioration des techniques expérimentales revêt une importance primordiale pour traiter les problèmes dont la solution théorique reste inconnue. Nous avons mis en évidence les possibilités nouvelles offertes par la photoélasticité grâce au banc du type Robert. En plus d'une précision accrue pouvant atteindre 1 % sur la détermination de la différence des contraintes principales, cet appareil, par l'affichage digital des données permet un semi automatisme des mesures.

Dans le cas où ces résultats doivent être utilisés pour la détermination des contraintes principales, l'entrée des informations sur ordinateur pourra être rendue entièrement automatique. Au stade ainsi atteint, des lors l'augmentation de la précision des résultats se fera en améliorant l'homogénéité des matériaux utilisés pour les modèles et aussi en supprimant leur biréfringence initiale.

Parallèlement aux méthodes expérimentales classiques, on emploiera aussi la méthode des éléments finis ; celle-ci nécessite l'utilisation d'un ordinateur mais présente beaucoup de souplesse dans sa mise en oeuvre et fournit une bonne précision.

Nos études théoriques et expérimentales montrent que le photoélasticimètre Robert d'une part, cette méthode des éléments finis d'autre part, qui constituent des étapes marquantes dans le domaine de l'analyse des contraintes, permettent dans de nombreux problèmes pratiques de déterminer les concentrations de contraintes et d'accéder aux moyens de les diminuer.

Cette étude, faite ici dans le domaine élastique linéaire, est aussi abordable pour tout autre comportement réel, à condition que la loi rhéooptique correspondante soit connue.

- APPENDICE -

SEPARATION DES CONTRAINTES PRINCIPALES

Nous connaissons la valeur du déphasage ϕ proportionnel à la différence des contraintes principales et l'angle η que fait la plus grande des contraintes principales avec l'axe horizontal aux sommets du quadrillage sur le modèle.

Soit M_i^j un tel sommet, i représentant la ligne et j la colonne du quadrillage dont les pas (Δx entre les colonnes et Δy entre les lignes) peuvent varier en fonction de la précision désirée.

En coordonnées cartésiennes, les conditions d'équilibre s'écrivent :

$$\frac{\delta\sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta\tau}{\delta y} = 0$$

$$\frac{\delta\sigma_y}{\delta y} + \frac{\delta\tau}{\delta x} = 0$$

σ_x et σ_y étant les contraintas normales et τ le cisaillement par rapport aux axes x et y.

En passant aux différences finies, au point M_i^j, ces équations deviennent, selon l'axe ox

$$\frac{\sigma_{x_i}^{\ j} - \sigma_{x_i}^{\ j-1}}{x^j - x^{j-1}} = \frac{\tau_{i+1}^{\ j} - \tau_{i-1}^{\ j}}{y_{i+1} - y_{i-1}}$$

soit : $\sigma_{x_i}^{\ j} = \sigma_{x_i}^{\ j-1} - (\tau_{i+1}^{\ j} - \tau_{i-1}^{\ j}) \frac{\Delta x}{2\Delta y}$ $\qquad A_1$

Selon l'axe oy :

$$\frac{\sigma_{y_i}^{\ j} - \sigma_{y_{i-1}}^{\ j}}{y_i - y_{i-1}} = - \frac{\tau_i^{\ j+1} - \tau_i^{\ j-1}}{x^{j+1} - x^{j-1}}$$

soit : $\sigma_{y_i}{}^{j} = \sigma_{y_{i-1}}{}^{j} - (\tau_i{}^{j+1} - \tau_i{}^{j-1}) \frac{\Delta y}{2\Delta x}$ A_2

d'autre part, en tout point nous avons :

$$\tau_i{}^{j} = 1/2\ \phi_i{}^{j} \sin 2\eta_i{}^{j}$$

A_3

Ainsi connaissant σ_x au point A et τ aux points B et C (Fig. A_1) la relation A_1 donne σ_x au point M.

De la même manière, connaissant σ_y en D et τ en E et F, (Fig. A_2) la relation A_2 donne σ_y au point N.

Sur un bord, notamment, on ne peut appliquer à la fois les deux relations A_1 et A_2 mais la relation :

$$\sigma_{x_i}{}^{j} - \sigma_{y_i}{}^{j} = \phi_i^j \cos 2\eta_i^j \qquad A_4$$

permet le passage, en un point d'une contrainte à l'autre.

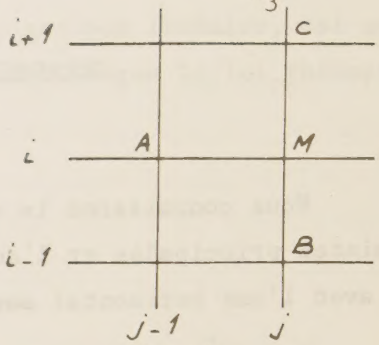


Fig. A_1

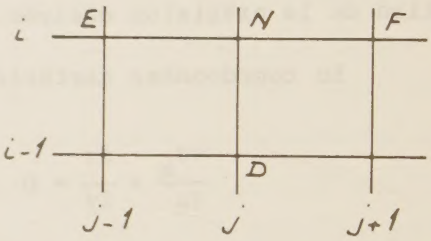


Fig. A_2

A l'aide des quatre relations repérées, il est donc possible de calculer les contraintes en coordonnées cartésiennes en tout point où l'on connait ϕ et η dès que l'on connait les contraintes normales en un point quelconque.

A partir de là, il est possible d'en déduire les contraintes principales σ_I et σ_{II} :

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \phi$$

$$\sigma_I + \sigma_{II} = \sigma_x + \sigma_y$$

d'où $$\sigma_I = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \phi}{2}$$

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y - \phi}{2}$$

Les calculs ont été effectués sur un programme 101

Imprimerie E.N.S.M. NANTES